



BEZRUTYNY



fundacja
matematyków
wrocławskich



Uniwersytet
Wrocławski

MIEDZYREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY: DOLNY ŚLĄSK vs. POMORZE

2024/2025 młodzicy

1. Dwadzieścia osób, wśród których byli mężczyźni, kobiety i dzieci, zjadło razem dwadzieścia pączków. Każde dziecko zjadło pół pączka, każda kobieta zjadła półtora pączka, zaś każdy mężczyzna zjadł trzy pączki. Ilu było mężczyzn, ile kobiet, a ile dzieci?
2. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P , że trójkąt ABP jest równoboczny. Określ, co jest większe: połowa pola kwadratu $ABCD$, czy pole trójkąta ABP . Odpowiedź uzasadnij.

3. Małgosia napisała taki ułamek:

$$\frac{2000 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot \dots \cdot 2025}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}$$

i twierdzi, że jest to liczba naturalna. Ile co najwyżej trójek jest w mianowniku?

4. W autobusie jadącym z Gdańska do Wrocławia $\frac{2}{3}$ obecnych w nim osób stanowią kobiety i dzieci. Aż $\frac{1}{8}$ z pozostałych osób jest łysa, w tym kierowca, ale nie on jest wśród łysych mężczyzn najwyższy. Autobus ma 52 miejsca siedzące dla pasażerów i każdy z pasażerów zajmuje jedno z nich. Ile miejsc siedzących jest wolnych?

5. Ela zobaczyła odbitą w lustrze godzinęwyświetloną na elektronicznym zegarze (jak na rysunku). Jaką godzinę zobaczyła ona w lustrze po sześciu godzinach i trzydziestu dziewięciu minutach?

21:51

6. Państwo Kowalscy odnawiają mieszkanie. Mąż na pomalowanie ścian potrzebuje 14 dni, a wspólnie z żoną pomalowaliby je w ciągu 10 dni. Ile dni na pomalowanie ścian potrzebowałaby sama żona?
7. Alan, Bartosz i Czesław budują trójkąty z patyczków. Mają do dyspozycji patyczki o długościach: 2, 4, 6, 8, 9, 10, 30, 40, 50, 60. Alan wybrał trzy patyczki tak, by obwód otrzymanego trójkąta był jak najmniejszy. Z pozostałych patyczków Bartosz wybrał 3 takie, z których mógł zbudować trójkąt o największym możliwym obwodzie. Z ostatnich czterech patyczków Czesław wybrał trzy i też zbudował trójkąt. Który patyczek został niewykorzystany?
8. Antek chodzi do Szkoły Podstawowej nr 1 we Wrocławiu. Kiedy 1 kwietnia 2025 roku obchodził urodziny, koledzy zauważyli, że jego wiek jest równy sumie cyfr roku, w którym się urodził. Które urodziny świętował Antek?
9. Nadia podzieliła prostokątną kartkę papieru na cztery jednakowe części trzema liniami równoległymi do dłuższej krawędzi kartki, a następnie zagięła kartkę wzdłuż tych linii, tworząc powierzchnię boczną prostopadłościanu o podstawie kwadratu, po czym skleila krawędzie taśmą klejącą. Tak utworzony pojemnik postawiła na stole i wypełniła szczelnie dwudziestoma kostkami do gry, z których każda była sześcianiem o krawędzi 1 cm. Taką samą kartkę podzieliła następnie na cztery jednakowe części, prowadząc linie równoległe do krótszych krawędzi, i zbudowała w ten sam sposób drugi pojemnik, który także szczelnie wypełniła kostkami. Ile kostek zmieściło się w tym pojemniku?
10. Na kartce narysowano kwadrat o boku długości 8 cm i wierzchołkach A, B, C, D (podanych w kolejności zgodnej z kierunkiem ruchu wskazówek zegara). W wierzchołku A usiadła mrówka, a w wierzchołku C – biedronka. W pewnym momencie obie rozpoczynają wędrówkę po brzegu kwadratu w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Mrówka idzie z prędkością 13 cm na minutę, a biedronka – 9 cm na minutę. Po jakim czasie nastąpi ich pierwsze spotkanie? W jakim punkcie ono nastąpi?

**MIĘDZYREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY – rok szkolny 2024/2025 – poziom:
młodzicy**

NADFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Gdyby ilość dzieci i ilość kobiet były liczbami różnej parzystości, to zostałyby niezjedzone pół pączka. Zatem liczby te są takiej samej parzystości. Oznacza to, że liczba mężczyzn była parzysta i była jedną z liczb: 2, 4, 6 (więcej mężczyzn zjadłoby więcej niż 20 pączków). Załóżmy, że było czterech mężczyzn. Wtedy kobiet i dzieci byłoby 16 i zjedliby razem 8 pączków. Jest to niemożliwe, ponieważ 16 osób (nie wszystkie dzieci, więc ktoś zjadł więcej niż połowę pączka) zjada więcej niż 8 pączków. Jeszcze łatwiej rozstrzygnąć, że nie mogło być sześciu mężczyzn. Rozważmy przypadek dwóch mężczyzn. Wtedy 18 kobiet i dzieci zjadło 14 pączków. Zauważmy, że możliwa jest tylko jedna odpowiedź, bo zwiększając ilość kobiet o 1 zwiększamy o 1 ilość zjedzonych pączków. Bez trudu znajdujemy rozwiązanie: kobiet było 5, dzieci 13, oczywiście mężczyzn było dwóch.
2. Poprowadźmy prostą równoległą do AB , przechodzącą przez punkt P i przecinającą boki AD i BC odpowiednio w punktach K i L . Łatwo zauważyć, że pole trójkąta ABP jest połową pola prostokąta $ABLK$, który zawiera się w rozważanym kwadracie. Zatem większa jest połowa kwadratu.
3. Liczba w liczniku posiada tyle samo liczb 3 w rozkładzie na czynniki pierwsze, co liczba $2001 \cdot 2004 \cdot 2007 \cdot 2010 \cdot 2013 \cdot 2016 \cdot 2019 \cdot 2022 \cdot 2025$. Łatwo widzieć, że sześć z powyższych czynników dzieli się przez 3, ale nie dzieli się przez 9. Pozostałe czynniki to $2007 = 3^2 \cdot 223$, $2016 = 3^2 \cdot 224$, $2025 = 3^4 \cdot 25$. Zatem w mianowniku nie może być więcej niż $6 + 2 + 2 + 4 = 14$ trójek.
4. Mężczyźni to jedna trzecia jadących autobusem, a $\frac{1}{8}$ z nich jest łysa. Znaczący to, że $\frac{1}{24}$ osób w autobusie to łysi mężczyźni. Jest ich co najmniej dwóch (kierowca i najwyższy wśród nich). Zatem liczba osób w pojeździe jest wielokrotnością liczby 24 większą od 24 i mniejszą od 54, zatem równą 48. Tylko 47 miejsc jest zajętych przez pasażerów, bo kierowca ma własne siedzisko. Ostatecznie, miejsc wolnych jest $52 - 47 = 5$.
5. Ponieważ na zegarze była godzina 15:12, to po 6 godzinach i 39 minutach zegar pokazywał godzinę 21:51, a w lustrze Ela zobaczyła 15:12.
6. Mąż maluje codziennie $\frac{1}{14}$ część wszystkich ścian, zaś $\frac{1}{10}$ gdy maluje razem z żoną. Żona samodzielnie malowałaby $\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35}$ część wszystkich ścian. Sama pomalowałaby ściany w 35 dni.
7. Najmniejszą sumę długości dają trzy najkrótsze patyczki, ale nie można z nich zbudować trójkąta, bo $2 + 4 = 6$. Nie ma też trójkąta o bokach długości 2, 6, 8, bo $2 + 6 = 8$. Istnieje natomiast trójkąt o bokach długości 4, 6, 8, gdyż $4 + 6 > 8$ (za niepotrzebne sprawdzanie wszystkich trzech nierówności proponuję -2 pkt). Alan wybrał zatem patyczki o długościach 4, 6, 8. Bartek wybrał trzy najdłuższe patyczki 40, 50 i 60, bo z nich można zbudować trójkąt. Zostały patyczki 2, 9, 10, 30. Z tych o długościach 2, 9, 30 lub 2, 20, 30, lub 9, 10, 30 nie da się zbudować trójkątów, więc Czesław musiał wybrać patyczki 2, 9 i 10 (za podanie odpowiedzi bez sprawdzenia innych możliwości przyznajemy 3 pkt). Pozostał patyczek długości 30.
8. Liczbę 2025 można zapisać jako $20 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$. Antek (jako uczeń szkoły podstawowej) ma kilka albo kilkanaście lat i urodził się w roku $20xy = 20 \cdot 100 + 10x + y$. Zachodzi $2025 - (20 + 0 + x + y) = 20 \cdot 100 + 10x + y$, czyli $2023 - x - y = 2000 + 10x + y$, skąd $23 = 11x + 2y$. Jedyna para liczb naturalnych spełniająca to równanie to $x = 1$ i $y = 6$ (za brak wykazania, że innych nie ma odejmujemy 3 pkt). Antek urodził się w 2016 roku i świętował dziewiąte urodziny.
9. Pierwszy pojemnik ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i objętości 20 cm^3 , którego wymiary są całkowitymi liczbami centymetrów, czyli wynoszą $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ lub $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, ale w drugim przypadku linie zgięcia papieru nie byłyby równoległe do dłuższej krawędzi kartki, więc

kartka musiała mieć wymiary $4\text{cm} \times 20\text{cm}$. Drugi pojemnik miał kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku $20 : 4 = 5\text{cm}$. W tym pojemniku zmieściło się $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ kostek.

10. Odległość między mrówką a biedronką jest równa połowie obwodu kwadratu, czyli 16. W czasie minuty mrówka przybliża się do biedronki o $13 - 9 = 4$ cm. Do pierwszego spotkania dojdzie po $16 : 4 = 4$ minutach. Biedronka przejdzie w ciągu 4 minut $4 \cdot 9 = 36$ cm, czyli zrobi jedno pełne okrążenie i przejdzie jeszcze 4 jednostki. Pierwsze spotkanie nastąpi więc w połowie boku CD .