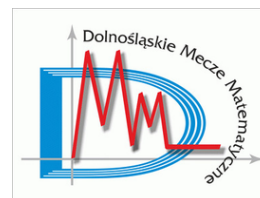


1. Udowodnić, że $x^4 + \frac{1}{x^4}$ jest liczbą całkowitą, jeśli wiadomo, że $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą.
2. Średnia cena rodzaju towaru w asortymencie pewnego sklepu wynosi 24 zł. Najdroższy towar w tym sklepie kosztuje 34 zł, a średnia cena pozostałych rodzajów (bez najdroższego) wynosi 22 zł. Ile różnych rodzajów towarów sprzedaje ten sklep?
3. Na trzech kartkach papieru napisano liczby 1, 2, 3. Następnie kartki odwrócono, przemieszano i znów napisano na nich 1, 2, 3. Liczby napisane na obu stronach każdej kartki dodano, a następnie trzy otrzymane liczby pomnożono. Czy jest możliwe, że w wyniku otrzymano liczbę nieparzystą?
4. Jeśli a i b będą cyframi, to przez $\overline{ab}$ oznaczamy liczbę, której cyfra jedności jest równa b , a cyfra dziesiątek jest równa a . Jakie są wszystkie możliwe wartości $\overline{ab}$, jeśli wiemy, że $\overline{ab} + \overline{ba}$ jest kwadratem pewnej liczby naturalnej?
5. Czy istnieją liczby całkowite x, y dla których zachodzi $xy(x + 2025y) = 2025^{2026}$?
6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC , oraz dowolny punkt P wewnątrz tego trójkąta. Odległości tego punktu od boków BC, CA, AB to odpowiednio x, y, z . Wykaż, że wielkość $x + y + z$ nie zależy od wyboru punktu P .
7. Poczynając od pewnej liczby parzystej Konstanty wypisał siedem kolejnych liczb naturalnych. Suma początkowych pięciu liczb jest trzycyfrowa, natomiast suma pięciu końcowych jest czterocyfrowa. Jaka jest suma wszystkich napisanych przez Kostka liczb?
8. Niech $m > 1$ będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że jeżeli liczba $2^m + 1$ jest pierwsza, to m jest liczbą parzystą.
9. Na płaszczyźnie dane są dwie grupy prostych. Proste w jednej grupie są równoległe do wszystkich prostych w tej grupie i do żadnej prostej z drugiej grupy. Pierwsza grupa liczy 7 prostych, a druga 5. Ile równoległoboków tworzą te proste?
10. Ile jest pięciocyfrowych liczb naturalnych, podzielnych przez 6 lub przez 10?



1. $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$, kwadrat liczby całkowitej jest liczbą całkowitą oraz różnica dwóch liczb całkowitych jest całkowita, więc $x^2 + \frac{1}{x^2}$ jest liczbą całkowitą. Podobnie $x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2$ z czego wynika, że $x^4 + \frac{1}{x^4}$ jest liczbą całkowitą.
2. Niech n oznacza liczbę rodzajów towarów w sklepie. Łączna cena wszystkich rodzajów towarów bez najdroższego wynosi $24 \cdot n - 34$ zł, zatem $\frac{24n-34}{n-1} = 22$. Po rozwiązaniu równania otrzymujemy $n = 6$.
3. Jest to niemożliwe. Jeżeli na kartce, na której przed odwróceniem było napisane 1 napisano 1 albo 3 to suma liczb po obu stronach tej kartki jest parzysta, więc cały iloczyn też jest parzysty. Jeżeli napisano na niej 2 to na kartce, na której przed odwróceniem napisano liczbę 3 musiano napisać 1 albo 3, ale wtedy ta kartka ma sumę liczb po obu stronach parzystą.
4. $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b) = x^2$. 11 dzieli x^2 i jest liczbą pierwszą, zatem 11^2 dzieli x^2 . Z tego wynika, że 11 dzieli $a + b$. Dodatkowo a i b są cyframi więc $a + b \in \{0, \dots, 18\}$. Z tego wynika, że $a + b = 11$, więc $\overline{ab}$ może być równe 56, 65, 47, 74, 29, 92, 38, 83.
5. Zauważmy, że liczba 2025^{2026} jest liczbą nieparzystą (jest to iloczyn samych liczb nieparzystych). Wobec tego $x, y, (x + 2025y)$ też muszą być wszystkie nieparzyste, ponieważ mnożą się do liczby nieparzystej. Jednakże skoro x oraz y są nieparzyste, to $2025y$ jest nieparzyste, a co za tym idzie $x + 2025y$ jest liczbą parzystą. Sprzeczność, zatem nie istnieją takie liczby całkowite x, y .
6. Zauważmy, że pole całego trójkąta jest równe sumie pól trzech trójkątów powstałych przez połączenie punktu P z wierzchołkami ABC . Odległości P od poszczególnych boków są wysokościami odpowiednich trójkątów, i tak $Pole_{BCP} = \frac{ax}{2}, Pole_{CAP} = \frac{ay}{2}, Pole_{ABP} = \frac{az}{2}$, gdzie a to długość boku trójkąta ABC . Otrzymujemy zatem:

$$x + y + z = \frac{2Pole_{ABC}}{a}$$

7. Niech n będzie liczbą parzystą, od której Kostek zaczął wypisywanie. Suma początkowych pięciu liczb wynosi $5n + 10$, a końcowych pięciu $5n + 20$. Wiemy z treści zadania, że $5n + 10 < 1000$, czyli $n < 198$, oraz $5n + 20 \geq 1000$, czyli $n \geq 196$. Skoro n jest parzystą, to $n = 196$. Suma $196 + 197 + 198 + 199 + 200 + 201 + 202$ wynosi 1393.
8. Załóżmy nie wprost, że $m = 2n + 1$ dla pewnego n naturalnego. Wtedy $2^m + 1 = 2^{2n+1} + 1 = 4^n \cdot 2 + 1 \equiv_3 1^n \cdot 2 + 1 \equiv_3 0$, gdzie $\equiv_3$ oznacza przystawanie modulo 3. Skoro zaś $2^m + 1 > 3$, to nie może być to liczba pierwsza jeżeli jest podzielna przez 3. Sprzeczność, zatem m jest parzystą.
9. Równoległobok powstaje przez wybór po parze prostych z obu grup. Wtedy sposobów jest

$$\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 210.$$

10. Podzielna przez 6 jest co 6-ta liczba od 10002 do 99996. Z zasady włączeń i wyłączeń:

$$\frac{99996 - 10002}{6} + 1 + \frac{99990 - 10000}{10} + 1 - \left(\frac{99990 - 10020}{30} + 1 \right) = 21000.$$