Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Mecz 3 (licea, runda eliminacyjna)

1. Niech ciąg (a_n) będzie zdefiniowany rekurencyjnie: $a_0 = 16$ oraz $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ dla $n \geq 0$. Podaj sumę wszystkich wyrazów tego ciągu podzielnych przez 8. Odpowiedź uzasadnij.

2. Wysokość trójkąta prostokątnego ABC opuszczonej z wierzchołka C, gdzie $|\sphericalangle BCA| = 90°$, jest średnicą koła ω_1. Niech D będzie spodkiem tej wysokości. Niech średnicą koła ω_2 będzie AB, koła ω_3 – AD, a koła ω_4 – BD. Udowodnij, że $2|\omega_1| = |\omega_2| - |\omega_3| - |\omega_4|$, gdzie $|S|$ oznacza pole figury S.

3. Załóżmy, że Ziemia jest idealną kulą o promieniu 6400 km. Jak daleko od siebie można postawić na jej powierzchni dwie wieże o wysokości 1000 metrów tak, by ze szczytu jednej było widać szczyt drugiej? Podaj odległość między szczytami wież.

4. Wyznacz wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania $\frac{\sqrt{x^4-1}+\sqrt{x^4+1}}{2} = 1$.

5. Niech $f(x) = |x^2 - |x^2 + x - 1||$. Wyznacz, w zależności od parametru m, liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$.

6. Spośród liczb $0, 1, 2, \ldots, 2023$ wylosowano jednostajnie ze zwracaniem pięć liczb a, b, c, d, e. Oblicz prawdopodobieństwo, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ daje resztę 5 przy dzieleniu przez 8.

7. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^n + n^{5n+3} + n^{9n+2} + n^{13n+1}$ jest podzielna przez $n^2 + 1$.

8. Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ oraz $|\sphericalangle BAC| < |\sphericalangle ABC|$. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC i niech D oznacza punkt przecięcia prostych AI oraz BC. Punkt P jest takim punktem na przedłużeniu odcinka AC, że

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|BC|}.$$

Wykaż, że $|\sphericalangle IBC| = |\sphericalangle IPC|$.

9. Ile rozwiązań wymiernych ma równanie $p^2 + q^2 = 1$? Odpowiedź uzasadnij.

10. Czy istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ i funkcja $f : A \to \mathbb{R}$, że f jest jednocześnie rosnąca i malejąca na całej dziedzinie?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Mecz 3 – rozwiązania (licea, runda eliminacyjna)

1. Zauważmy, że $a_1 \equiv 6 \mod 8$, więc $a_2 \equiv 2 \mod 8$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że jeśli $a_n \equiv 2 \mod 8$, to $a_{n+1} \equiv 2 \mod 8$. Zatem, korzystając z zasady indukcji matematycznej mamy, że jeśli $n \geq 2$, to $a_n \equiv 2 \mod 8$. Zatem jedynym wyrazem tego ciągu jest $a_0 = 16$ i tyle wynosi suma wszystkich jego wyrazów podzielnych przez 8.

2. Niech $|AD| = a$, $|BD| = b$, $|CD| = h$. Wtedy $|\omega_1| = \frac{\pi h^2}{4}$, $|\omega_2| = \frac{\pi(a+b)^2}{4}$, $|\omega_3| = \frac{\pi a^2}{4}$, $|\omega_4| = \frac{\pi b^2}{4}$. Zatem $|\omega_2| - |\omega_3| - |\omega_4| = \frac{\pi ab}{2}$, co z własności wysokości opuszczonej z wierzchołka trójkąta prostokątnego jest równe $\frac{\pi h^2}{2} = 2|\omega_1|$, czego należało dowieść.

3. Zauważmy, że w szukanej konfiguracji linia łącząca szczyty wież jest styczna do powierzchni Ziemi. Wobec tego punkt styczności tej linii z powierzchnią Ziemi, szczyt pierwszej wieży i środek Ziemi stworzą trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $6400\,\text{km}$ i x oraz o przeciwprostokątnej $6401\,\text{km}$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika wówczas, że

$$x = \sqrt{6401^2 - 6400^2}\,\text{km} = \sqrt{12801}\,\text{km} \approx 113.1415\,\text{km}.$$

Wynikiem zadania jest odległość między szczytami wież, czyli dwukrotność obliczonej przez nas odległości od szczytu wieży do punktu styczności linii łączącej szczyty z powierzchnią Ziemi. Zatem wynikiem jest

$$2x = 2\sqrt{12801}\,\text{km} \approx 226.2830\,\text{km}.$$

4. Podstawmy $t = x^4$. Wtedy równanie przyjmuje postać

$$\frac{\sqrt{t-1} + \sqrt{t+1}}{2} = 1.$$

Podnieśmy obie strony do kwadratu, mamy wtedy

$$\frac{2t + 2\sqrt{t-1}\sqrt{t+1}}{4} = 1,$$

czyli równoważnie

$$\sqrt{t-1}\sqrt{t+1} = 2 - t.$$

Ponownie podnieśmy obie strony do kwadratu. Uzyskamy wtedy

$$t^2 - 1 = 4 - 4t + t^2,$$

czyli

$$t = \frac{5}{4}.$$

Powracając z podstawieniem otrzymujemy $x = \pm\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}$ i podstawiając bezpośrednio do początkowego równania potwierdzamy, że są to jego rozwiązania.

Uwaga: obustronne podniesienie do kwadratu nie jest przekształceniem równoważnym i należy zwrócić na to uwagę przy ocenianiu.

5. Zauważmy, że funkcja $f(x) = |x^2 - |x^2+x-1||$ podana w treści zadania na odpowiednich przedziałach jest zwykłą funkcją kwadratową. Rozłóżmy funkcję f w tenże sposób, określając dla obu modułów z jej definicji znak argumentu modułu:

   (a) $x^2 + x - 1 \geq 0$ oraz $-x + 1 \geq 0$:

   Ten warunek jest równoważny koniunkcji warunków $x \notin \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ oraz $x \leq 1$. Na tym zbiorze funkcja f zachowuje się jak funkcja $x \mapsto -x + 1$, a więc przyjmuje po jednym razie wartości ze zbioru $[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

   (b) $x^2 + x - 1 \geq 0$ oraz $-x + 1 < 0$:

   Ten warunek jest równoważny koniunkcji warunków $x \notin \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ oraz $x > 1$, a więc jest on równoważny warunkowi $x > 1$ i na tym zbiorze funkcja f zachowuje się jak funkcja $x \mapsto x - 1$, a więc przyjmuje po jednej wartości ze zbioru $(0, +\infty)$.

   (c) $x^2 + x - 1 < 0$ oraz $2x^2 + x - 1 \geq 0$:

   Ten warunek jest równoważny koniunkcji warunków $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ oraz $x \notin \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, czyli $x \in (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1] \cup [\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$. Na tym zbiorze funkcja f zachowuje się jak funkcja $x \mapsto 2x^2 + x - 1$, ponieważ wtedy $|x^2 + x - 1| = -(x^2 + x - 1)$ z pierwszego warunku, $f(x) = |x^2 - (-(x^2 + x - 1))| = |2x^2 + x - 1|$ i z drugiego warunku to będzie równe $2x^2 + x - 1$.
   Wierzchołek paraboli $2x^2 + x - 1$ występuje dla argumentu $x = \frac{1}{4}$, a więc na przedziałach $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1]$ i $[\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ funkcja będzie różnowartościowa, a więc doda po jednej przyjętej wartości dla zbioru $[0, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ oraz po jednej przyjętej wartości dla zbioru $[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$.

   (d) $x^2 + x - 1 < 0$ oraz $2x^2 + x - 1 < 0$:

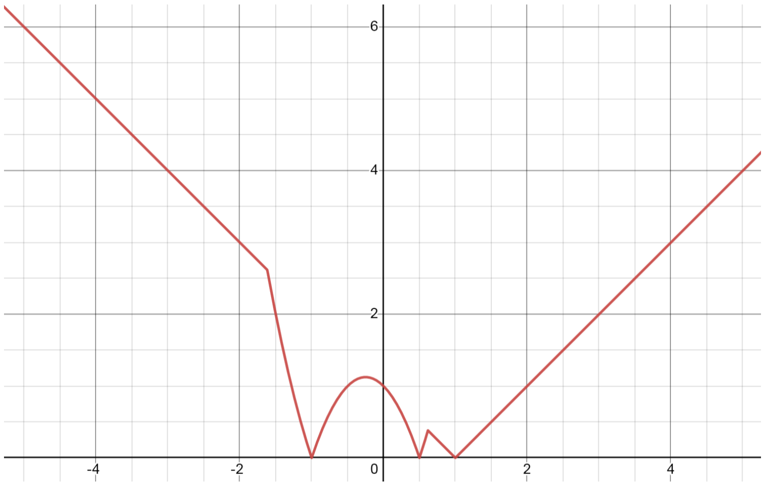
   Ten warunek jest równoważny koniunkcji warunków $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ oraz $x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, czyli $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Na tym zbiorze funkcja f zachowuje się jak funkcja $x \mapsto -2x^2 - x + 1$, ponieważ wtedy $|x^2+x-1| = -(x^2+x-1)$ z pierwszego warunku, $f(x) = |x^2-(-(x^2+x-1))| = |2x^2 + x - 1|$ i z drugiego warunku to będzie równe $-(2x^2 + x - 1) = -2x^2 - x + 1$.
   Wierzchołek paraboli $-2x^2 - x + 1$ występuje dla argumentu $x = \frac{1}{4}$, a więc na tym przedziale funkcja przyjmie po dwa razy wartości ze zbioru $(0, \frac{9}{8})$ i dokładnie raz, w wierzchołku, wartość $\frac{9}{8}$.

   Podsumowując, gdy:

   - $m < 0$, wynikiem jest 0;
   - $m = 0$, wynikiem jest 3;
   - $m \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, wynikiem jest 6;
   - $m = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, wynikiem jest 5;
   - $m \in (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{9}{8})$, wynikiem jest 4;
   - $m = \frac{9}{8}$, wynikiem jest 3;
   - $m > \frac{9}{8}$, wynikiem jest 2.

   Uwaga: pomimo tego, że $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ pojawia się jako koniec przedziału w opisach zbiorów wartości poszczególnych części funkcji f, nie pojawia się w końcowym wyniku, ponieważ przypadek (c) dodaje po jednym wystąpieniu wartości z przedziału $[0, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$, a przypadek (a) po jednym wystąpieniu wartości z przedziału $[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, a więc efektywnie łącznie dodają po jednym wystąpieniu każdej nieujemnej wartości.

   Poniżej zamieszczamy wykres funkcji f.



6. Zauważmy, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ daje resztę 5 z dzielenia przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a, b, c, d, e są nieparzyste lub dokładnie jedna z nich jest nieparzysta i dokładnie jedna lub dokładnie trzy pozostałe są niepodzielne przez 4.

   Zauważmy, że w zbiorze $\{0, 1, \ldots, 2023\}$ dokładnie połowa liczb to liczby nieparzyste, wiec prawdopodobieństwo uzyskania pierwszego przypadku to
$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

   Zauważmy, że w zbiorze $\{0, 1, \ldots, 2023\}$ dokładnie czwarta część liczb to liczby parzyste niepodzielne przez 4, jak również dokładnie czwarta część liczb to liczby parzyste podzielne przez 4, zatem prawdopodobieństwo uzyskania drugiego przypadku to
$$5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\binom{4}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}\right) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{64}\right) = \frac{5}{64}.$$

   Oba przypadki były rozłączne, więc sumaryczne prawdopodobieństwo wynosi
$$\frac{1}{32} + \frac{5}{64} = \frac{7}{64}.$$

7. *Sposób pierwszy*

   Zauważmy, że
$$n^{9n+2} + n^n = n^n(n^{8n+2} + 1) = n^n((n^2)^{4n+1} + 1).$$

   Ze wzoru skróconego mnożenia $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \cdots + b^{2k})$ wnioskujemy, że $(n^2)^{4n+1} + 1$ jest podzielne przez $n^2 + 1$.

   Analogicznie zapisujemy
$$n^{13n+1} + n^{5n+3} = n^{5n+3}(n^{8n-2} + 1) = n^n((n^2)^{4n-1} + 1)$$

   i otrzymujemy ten sam wniosek.

   Suma liczb $n^{9n+2}+n^n$ i $n^{13n+1}+n^{5n+3}$ jest zatem podzielna przez n^2+1, bo jej składniki są podzielne przez $n^2 + 1$.

   Sposób drugi

   Rozważmy wielomiany $P(x) = x^n + x^{5n+3} + x^{9n+2} + x^{13n+1}$ oraz $Q(x) = x^2 + 1$. Udowodnimy, że wielomian Q dzieli wielomian P w pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}[x]$.

   Zauważmy, że wielomian Q ma pojedyncze pierwiastki zespolone i oraz $-i$ i żadnego więcej. Skoro $P(i) = P(-i) = 0$, to z twierdzenia Bézouta wynika, że wielomian P jest podzielny przez wielomian Q w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$, a zatem dla dowolnej liczby całkowitej m liczba $P(m)$ jest podzielna przez $Q(m)$. Podstawiając $m = n$ uzyskujemy tezę.

8. Zauważmy, że skoro I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to I jest punktem przecięcia się dwusiecznych, zatem półprosta AD jest dwusieczną. Oznaczmy $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, wówczas $|\sphericalangle ADC| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Skoro trójkąty ADC i BPC są prostokątne, to mamy równości

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\sqrt{|AD|^2 - |AC|^2}}{|AC|} = \sqrt{\frac{|AD|^2 - |AC|^2}{|AC|^2}} = \sqrt{\frac{|AD|^2}{|AC|^2} - 1} = \sqrt{\left(\frac{|AD|}{|AC|}\right)^2 - 1}$$

$$\sqrt{\left(\frac{|BP|}{|BC|}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{|BP|^2}{|BC|^2} - 1} = \sqrt{\frac{|BP|^2 - |BC|^2}{|BC|^2}} = \frac{\sqrt{|BP|^2 - |BC|^2}}{|BC|} = \frac{|CP|}{|BC|}.$$

Z cechy bok-kąt-bok trójkąty ADC i BPC są podobne, zatem w szczególności $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle ADC| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Ponadto, skoro I jest punktem przecięcia się dwusiecznych, to mamy

$$180^\circ = |\sphericalangle BIC| + |\sphericalangle IBC| + |\sphericalangle BCI| = |\sphericalangle BIC| + \frac{|\sphericalangle ABC|}{2} + \frac{|\sphericalangle BCA|}{2} = |\sphericalangle BIC| + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} + 45^\circ,$$

skąd dostajemy $|\sphericalangle BIC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Z faktu, że w czworokącie $BICP$ przeciwległe kąty mają miary sumujące się do 180° wnioskujemy, że na tym czworokącie daje się opisać pewien okrąg ω. Kąty $\sphericalangle IBC$ oraz $\sphericalangle IPC$ są zatem kątami wpisanymi w okrąg opartymi na tym samym łuku, więc mają równe miary.

9. Niech $p = \frac{a}{c}$, $q = \frac{b}{c}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, oraz a i b są względnie pierwsze. Wtedy równanie $p^2 + q^2 = 1$ przekształcamy do $a^2 + b^2 = c^2$.

   Niech $a = m^2 - 1$, $b = 2m$, gdzie m jest parzyste. Zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele parami różnych par liczb a i b takiej postaci i zawsze $m^2 - 1$ oraz $2m$ są liczbami względnie pierwszymi, więc rozwiązań równania $p^2 + q^2 = 1$ jest nieskończenie wiele.

10. Tak, przykładem takiego zbioru jest $A = \{0\}$ i dowolna $f : \{0\} \to \mathbb{R}$. Wynika to z definicji funkcji rosnącej i malejącej: gdy dziedzina ma mniej niż dwa elementy, funkcja spełnia zarówno definicję bycia rosnącą i malejącą. Innym przykładem jest funkcja $f : \varnothing \to \mathbb{R}$.