8. **Irańska Olimpiada Geometryczna**

Poziom zaawansowany

5 listopada 2021

Zadanie 1. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC. Punkt D jest środkiem odcinka AC, punkt E jest spodkiem wysokości trójkąta ABC, opuszczonej z wierzchołka A. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F. Punkt H leży na krótszym łuku BC okręgu ω i spełniona jest równość $\angle BHE = \angle ABC$. Wykazać, że $\angle BHF = 90°$.

Zadanie 2. Okręgi Γ_1, Γ_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okręgi Γ_1, Γ_2 ponownie w punktach odpowiednio C i D, przy czym A leży wewnątrz odcinka CD. Styczna do okręgu Γ_2 w punkcie A przecina Γ_1 ponownie w punkcie E. Niech F będzie takim punktem na okręgu Γ_2, że F i A leżą po przeciwnych stronach prostej BD oraz $2\angle AFC = \angle ABC$. Wykazać, że styczna w punkcie F do okręgu Γ_2, prosta BD i prosta CE są współpękowe.

Zadanie 3. Wysokości AD, BE, CF trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Prosta prostopadła do prostej EF, przechodząca przez punkt H, przecina proste EF, AB, AC w punktach odpowiednio P, T, L. Punkt K leży na boku BC oraz $BD = KC$. Niech ω będzie okręgiem przechodzącym przez punkt P, stycznym do prostej AH w punkcie H. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie ATL i okrąg ω są styczne w punkcie leżącym na prostej KH.

Zadanie 4. Dany jest 2021-kąt wypukły, w którym żadne cztery wierzchołki nie leżą na jednym okręgu oraz żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wykazać, że istnieją takie dwa jego wierzchołki, że wewnątrz dowolnego przechodzącego przez nie okręgu leżą co najmniej 673 wierzchołki tego wielokąta.

Zadanie 5. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boku BC w punkcie D. Punkty P i Q leżą na boku BC w taki sposób, że $\angle PAB = \angle BCA$ oraz $\angle QAC = \angle ABC$. Niech K, L będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio ABP, ACQ. Wykazać, że prosta AD jest prostą Eulera trójkąta IKL.

Czas trwania konkursu: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.