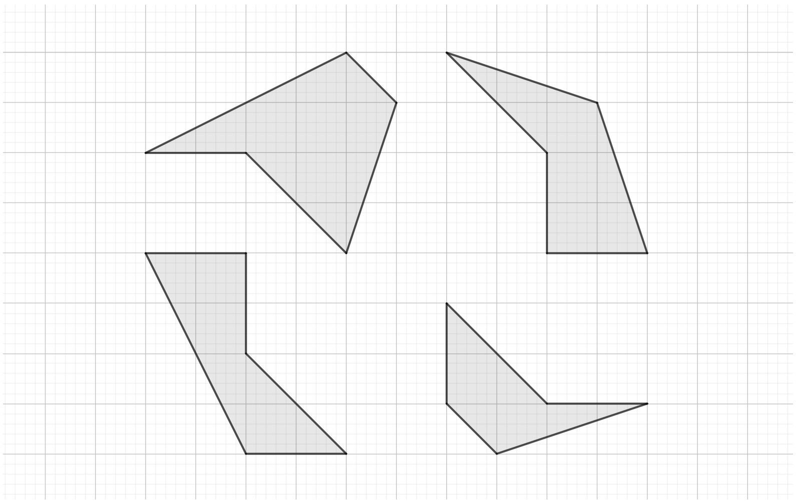
8. **Irańska Olimpiada Geometryczna**

Poziom podstawowy

5 listopada 2021

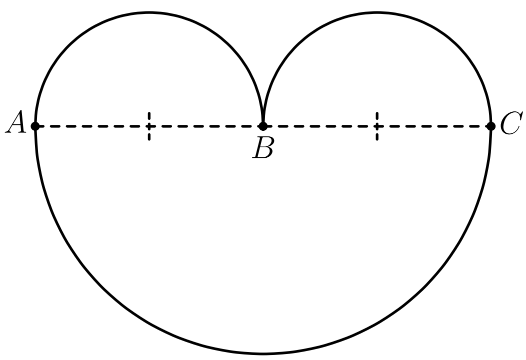
Upublicznianie poniższych treści jest zabronione do momentu udostępnienia ich na oficjalnej stronie olimpiady: igo-official.com

Zadanie 1. Złożyć poniższe cztery wielokąty w jedną figurę, która będzie miała przynajmniej dwie osie symetrii. Narysować otrzymaną figurę i zaznaczyć linie podziału na figury składowe (liniami ciągłymi) i osie symetrii (liniami przerywanymi).



Zadanie 2. Na bokach AB, BC, CD, DA kwadratu $ABCD$ leżą punkty, odpowiednio, K, L, M, N, w taki sposób, że pole czworokąta $KLMN$ jest równe połowie pola kwadratu $ABCD$. Wykazać, że pewna przekątna czworokąta $KLMN$ jest równoległa do pewnego boku kwadratu $ABCD$.

Zadanie 3. *Sercem* nazwiemy kształt złożony z półokręgów o średnicach AB, BC i CA, gdzie B jest środkiem odcinka AC; jak na poniższym rysunku. Dane jest serce ω. Nazwijmy parę punktów (P, P') *połowiącą*, jeśli leżą one na ω i dzielą jego obwód na dwie części równej długości. Przypuśćmy, że pary (P, P') oraz (Q, Q') są połowiące. Styczne do ω w punktach P, P', Q, Q' wyznaczają czworokąt wypukły $XYZT$. Okazało się, że czworokąt $XYZT$ da się wpisać w okrąg. Wyznaczyć kąt między prostymi PP' oraz QQ'.



Zadanie 4. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD. Na boku CD leżą takie punkty E, F, że E leży pomiędzy D a F, oraz $DE = CF$. Niech X będzie odbiciem E względem AD, zaś Y odbiciem C względem AF. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach ADF oraz BXY mają ten sam środek.

Zadanie 5. Punkty A_1, A_2, …, A_{2021} leżą na płaszczyźnie, przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe, a także

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \ldots + \angle A_{2021}A_1A_2 = 360^\circ,$$

przy czym jako kąt $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ rozumiemy ten mniejszy od 180° (gdzie $i = 1, 2, \ldots, 2021$, oraz przyjmujemy $A_0 = A_{2021}$ i $A_{2022} = A_1$). Wykazać, że możemy wybrać pewną liczbę tych kątów tak, by sumowały się do 90°.

Czas trwania konkursu: 4 godziny.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.