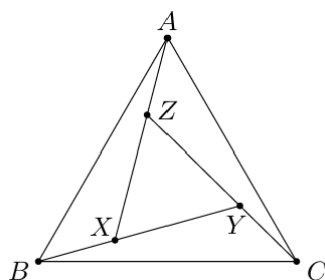




11. Irańska Olimpiada Geometryczna
Poziom zaawansowany
18 października 2024

Upublicznianie poniższych treści jest zabronione do momentu udostępnienia ich na oficjalnej stronie olimpiady: igo-official.com

Zadanie 1. Trójkąt równoboczny ABC podzielono na 4 trójkąty o równych polach; trzy przystające do siebie ABX , BCY , CAZ i mniejszy trójkąt równoboczny XYZ , jak na rysunku. Udowodnij, że punkty X , Y , Z leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC .



Zadanie 2. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Na boku CD leży taki punkt P , że $\angle CBP = 90^\circ$. Proste AC i BP przecinają się w takim punkcie K , że $AK = AP = AD$. Punkt H jest rzutem B na prostą AC . Udowodnij, że $\angle APH = 90^\circ$.

Zadanie 3. W trójkącie ABC punkt D to spodek wysokości z A na bok BC , a I , I_A i I_C to odpowiednio środki okręgu wpisanego, A -dopisanego i C -dopisanego. Niech $P \neq B$ i $Q \neq D$ to drugie przecięcia okręgu opisanego na trójkącie BDI_C z prostymi, odpowiednio, BI i DI_A . Udowodnij, że $AP = AQ$.

Okrąg A -dopisany jest styczny do boku BC i przedłużeń AB i AC .

Zadanie 4. Wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC leży taki punkt P , że $\angle BPC = 90^\circ$ i $\angle BAP = \angle PAC$. Niech D będzie rzutem P na bok BC , a M i N to środki okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ADC . Udowodnij, że czworokąt $BMNC$ jest wpisany w okrąg.

Zadanie 5. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω . Niech E będzie ustalonym punktem na odcinku AC . Punkt M jest dowolnym punktem na ω , a proste AM i BD przecinają się w punkcie P . Prosta EP przecina AB i AD w punktach, odpowiednio, R i Q . Punkt S jest przecięciem BQ i DR , a proste MS i AC przecinają się w punkcie T . Udowodnij, że niezależnie od położenia punktu M okrąg opisany na trójkącie CMT przechodzi przez ustalony punkt różny od C .

Czas trwania zawodów: 4 godziny 30 minut.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.