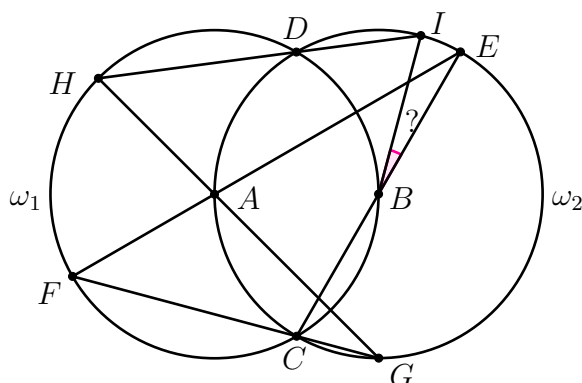




11. Irańska Olimpiada Geometryczna
Poziom średniozaawansowany
 18 października 2024

Upublicznianie poniższych treści jest zabronione do momentu udostępnienia ich na
 oficjalnej stronie olimpiady: igo-official.com

Zadanie 1. Na poniższym rysunku punkty A oraz B są środkami okręgów ω_1, ω_2 . Półprosta CB przecina okrąg ω_2 w punkcie E , półprosta EA przecina okrąg ω_1 w punkcie F , półprosta FC przecina okrąg ω_2 w punkcie G , półprosta GA przecina okrąg ω_1 w punkcie H , a półprosta HD przecina okrąg ω_2 w punkcie I . Oblicz miarę kąta IBE .



Zadanie 2. Na boku CD pięciokąta wypukłego $ABCDE$ leżą punkty X oraz Y tak, że punkt X znajduje się pomiędzy punktami Y i C . Załóżmy, że trójkąty XCB, ABX, AXY, AYE, YED są podobne (przy tym właśnie porządku wierzchołków). Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ACD oraz AXY są wzajemnie styczne.

Zadanie 3. W trójkącie ostrokątnym ABC na boku BC leży punkt D . Niech J będzie takim punktem na boku AC , że $\angle BAD = 2 \cdot \angle ADJ$, a ω niech będzie okręgiem opisanym na trójkącie CDJ . Prosta AD przecina ω ponownie w punkcie P , a Q jest spodkiem wysokości poprowadzonej z J na bok AB . Udowodnij, że jeśli $JP = JQ$, to prosta prostopadła do DJ i przechodząca przez punkt A jest styczna do okręgu ω .

Zadanie 4. Eryk złożył wielokąt wypukły P ze skończenie wielu środkowosymetrycznych wielokątów, przy czym te wielokąty nie muszą być parami przystające, a także nie muszą być wypukłe. Udowodnij, że wielokąt P ma środek symetrii.

Zadanie 5. Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przecinają się w punkcie P . Obrazy prostych AD i BC w symetrii względem dwusiecznych kątów PDC oraz PCD przecinają okręgi opisane na trójkątach APD oraz BPC w punktach, odpowiednio, D_1 i C_1 . Prosta C_1A przecina okrąg opisany na trójkącie BPC ponownie w punkcie Y , a prosta D_1C przecina okrąg opisany na trójkącie APD ponownie w punkcie X . Udowodnij, że punkty P, X oraz Y są współliniowe.

Czas trwania zawodów: 4 godziny 30 minut.
 Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.