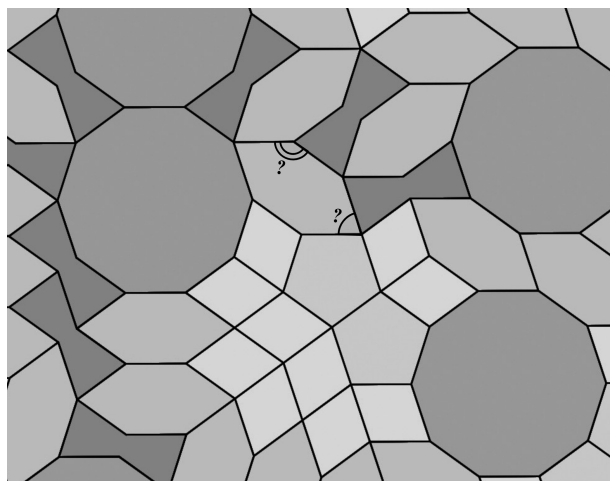




12. Irańska Olimpiada Geometryczna
Poziom podstawowy
17 października 2025r.

Prosimy nie rozpowszechniać treści zadań konkursowych do momentu ich opublikowania na oficjalnej stronie IGO: igo-official.com

Zadanie 1. Na rysunku poniżej przedstawiono fragment mozaiki z meczetu w Isfahanie, która składa się z pięciu różnych typów wielokątów. Są wśród nich m.in. pięciokąty foremne i dziesięciokąty foremne. Boki wszystkich występujących w tej mozaice wielokątów są równej długości. Widoczne na rysunku sześciokąty mają kąty dwóch rodzajów, przy czym są tam cztery przystające (takie same) kąty pierwszego rodzaju i dwa inne przystające (takie same) kąty drugiego rodzaju. Znajdź miary zaznaczonych kątów.



Zadanie 2. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkty O_1, O_2 leżą na jego bokach, odpowiednio, AB i AC . Wiadomo, że okręgi: o_1 – o środku w punkcie O_1 i przechodzący przez punkt B oraz o_2 – o środku w punkcie O_2 i przechodzący przez punkt C , są styczne zewnętrznie, przy czym ich wspólny punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Znajdź kąt $\angle BPC$.

Zadanie 3. Arasz ma duży papierowy trójkąt, który jest prostokątny i równoramienny. Złożenie tego papieru nazywa się *dobrym*, jeśli wielokąt uzyskany po tym złożeniu ma wszystkie kąty mniejsze niż 180° . Arasz wykonuje *dobry* złożenie. Następnie Babak bierze złożony przez Arasza papier i wykonuje dwa *dobry* złożenia, tak aby początkowy trójkąt był złożony dokładnie trzy razy. Na tym kończy się składanie papieru. Arasz chce, aby ostateczny wielokąt miał jak najwięcej boków, natomiast Babak chce czegoś dokładnie przeciwnego. Jeżeli każde z nich będzie postępować tak, żeby osiągnąć swój cel, to ile boków będzie miał ostateczny wielokąt?

Zadanie 4. Rozpatrzmy czworokąt wypukły o następującej własności: każda jego przekątna jest dłuższa od każdego z jego boków. Udowodnij, że wśród boków tego czworokąta jest taki, że długość każdej z przekątnych jest mniejsza niż $a\sqrt{3}$, gdzie a to długość tego boku.

Zadanie 5. W trójkącie ABC dane są kąty: $\angle CAB = 15^\circ$ i $\angle CBA = 30^\circ$. Wewnątrz kąta $\angle BCA$ leżą takie punkty X i Y , że $\angle BCX = \angle ACY = 45^\circ$ oraz $BC = CY$ i $AC = CX$. Niech prosta XY przecina AB w punkcie Z . Udowodnij, że $AZ = BC$.

Czas: 4 godziny.
Każde zadanie warte jest 8 punktów.



12. Irańska Olimpiada Geometryczna
Poziom średniozaawansowany
17 października 2025r.

Prosimy nie rozpowszechniać treści zadań konkursowych do momentu ich opublikowania na oficjalnej stronie IGO: igo-official.com

Zadanie 1. Dany jest trapez prostokątny $PYXQ$ ($PY \perp PQ \perp QX$), którego przekątne PX i QY przecinają się w punkcie S . Na prostej PQ leżą takie punkty A i B , że

$$\angle AYQ = \angle BXP = 90^\circ.$$

Udowodnij, że trójkąty AYS i BXS są podobne.

Zadanie 2. Dany jest kwadrat $ABCD$, w którym środkiem boku BC jest punkt E , a na boku AB leży taki punkt F , że $DE \perp EF$. Wewnątrz tego kwadratu leży taki punkt G , że $GF = EF$ i $GF \perp EF$. Proste AC , DE przecinają się w punkcie X . Udowodnij, że punkty G, B, E, X leżą na okręgu.

Zadanie 3. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABC . Punkt T jest środkiem tego łuku BC okręgu ω , który nie zawiera punktu A . Prosta BT przecina dwusieczną kąta zewnętrznego BAC w punkcie P , H jest rzutem prostokątnym punktu A na styczną do ω w punkcie T , a M jest środkiem odcinka AP . Udowodnij, że $\angle AHM = \angle ACP$.

Zadanie 4. W sześciokącie wypukłym $ABCYXD$ zachodzą zależności

$$\angle ACY = \angle BDX = 90^\circ$$

$$\angle BAC = 2\angle CAY, \quad \angle ABD = 2\angle DBX$$

$$XY = DX + CY$$

Udowodnij, że

$$\sqrt{(CD - DX)(CD - CY)} \leq \frac{AC + BD - AB}{2}$$

Zadanie 5. W trójkącie ABC bok AB jest krótszy od boku AC . Niech ω będzie dowolnym okręgiem przechodzącym przez B i C . Oznaczmy przez F i E punkty przecięcia ω z, odpowiednio, AB i AC . Niech M i N będą punktami przecięcia symetralnych odcinków, odpowiednio, BF i CE z bokiem BC . Niech P będzie punktem przecięcia symetralnej odcinka MN z EF . Udowodnij, że, niezależnie od wyboru okręgu ω , wszystkie możliwe do otrzymania w ten sposób punkty P leżą na tej samej prostej.

Czas: 4 godziny 30 minut.
Każde zadanie warte jest 8 punktów.



12. Irańska Olimpiada Geometryczna
Poziom zaawansowany
17 października 2025r.

Prosimy nie rozpowszechniać treści zadań konkursowych do momentu ich opublikowania
na oficjalnej stronie IGO: igo-official.com

Zadanie 1. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AB = AC$. Na boku BC leżą punkty X oraz Y tak, że X znajduje się pomiędzy punktami B i Y . Oznaczmy przez ω_1 okrąg opisany na trójkącie AYB . Okrąg ω_2 przechodzi przez punkty C oraz X i jest styczny do prostej AC . Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach M i N . Udowodnij, że $\angle AMX = \angle BNX$.

Zadanie 2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω . Różne punkty X, Y leżą na półprostych, odpowiednio, DB oraz CA tak, że $DA = DX$ i $CB = CY$. Proste AX, BY przecinają bok CD w punktach, odpowiednio, P, Q . Udowodnij, że oś potęgowa okręgów opisanych na trójkątach APC oraz BQD oraz symetralna boku AB przecinają się w punkcie leżącym na ω .

Zadanie 3. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC ($AB \neq AC$). X jest dowolnie wybranym punktem na odcinku AM . Punkt A' leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC tak, że $AA' \parallel BC$. Okrąg opisany na trójkącie AXA' przecina boki AB, AC w punktach, odpowiednio, F oraz E . Proste BC i $A'X$ przecinają się w punkcie P . Udowodnij, że punkty P, M, E, F leżą na jednym okręgu.

Zadanie 4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AB = AC$. Na boku BC leżą takie punkty M oraz N , że $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle BAC$, przy czym M leży między punktami B i N . Punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN . Symetralne odcinków AM i AN przecinają BC w punktach, odpowiednio, R i Q . Na odcinkach PR i PQ leżą takie punkty, odpowiednio, S oraz T , że $ST \perp PA$. Punkty K i L są obrazami A w symetrii względem prostych, odpowiednio, QS i RT . Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach CMK oraz BNL przecinają się na symetralnej boku BC .

Zadanie 5. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AC, AB w punktach, odpowiednio, E i F . Okrąg ω_1 jest styczny do odcinków BE, CE oraz do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Okrąg ω_2 jest styczny do odcinków CF, BF oraz do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Udowodnij, że zewnętrzny środek jednokładności okręgów ω_1, ω_2 leży na osi potęgowej okręgów: wpisanego w trójkąt ABC i opisanego na tym trójkącie.

Uwaga: Zewnętrzny środek jednokładności dwóch okręgów to punkt, w którym przecinają się wspólne styczne zewnętrzne tych okręgów.

Czas: 4 godziny 30 minut.
Każde zadanie warte jest 8 punktów.