8 Memoriał Uli Marciniak

23.03.2024

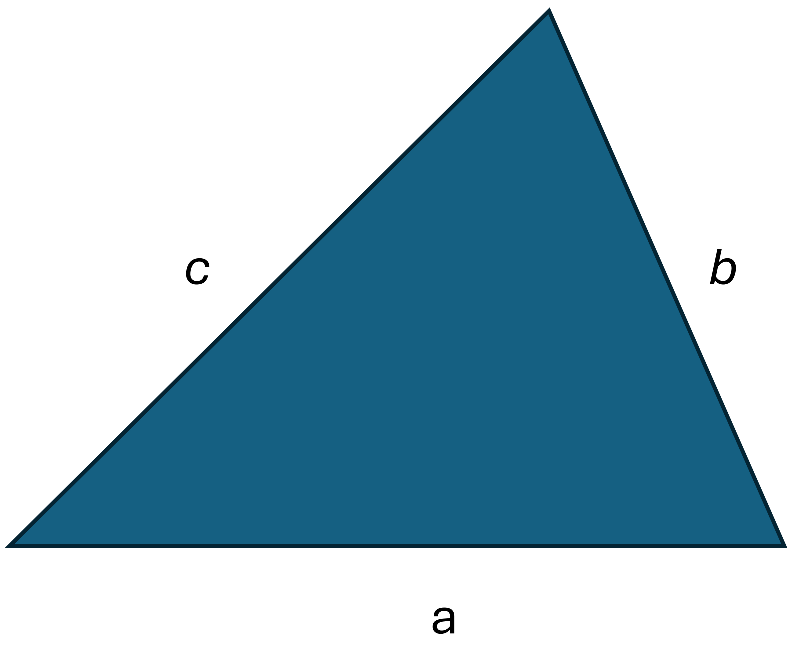
8 Memoriał Uli Marciniak

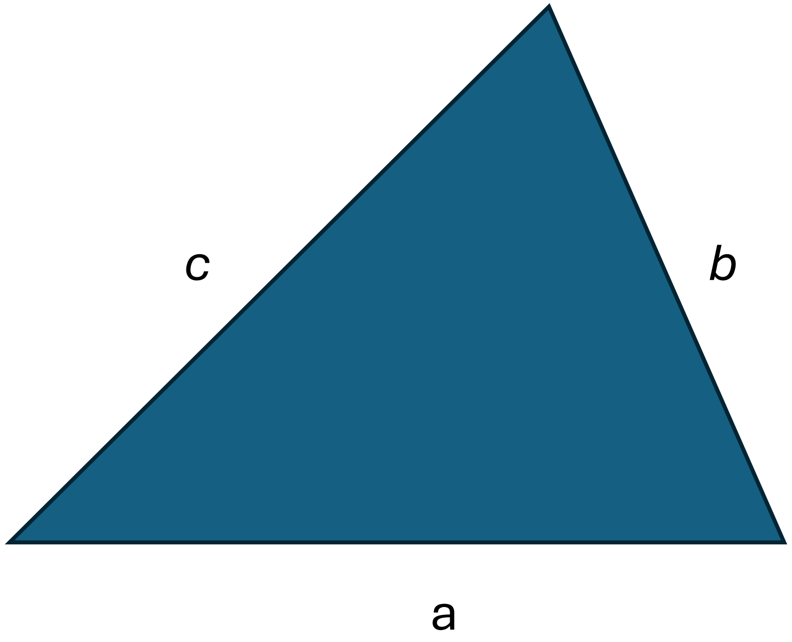
Wielka, większa i największa

23.03.2024

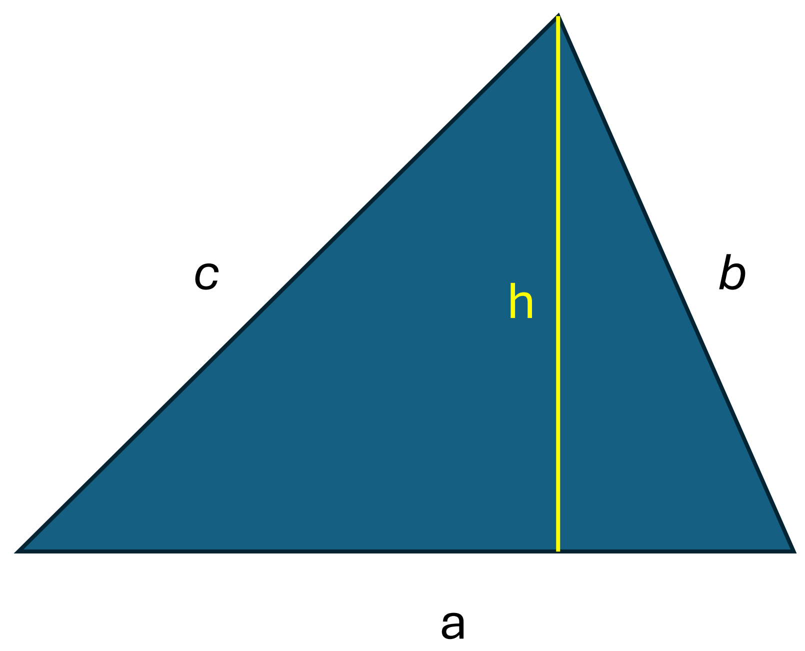
Wielka, większa i największa

Jak duże, to duże. Jak małe, to małe!


c
b
a



Obwód = *a* + *b* + *c*

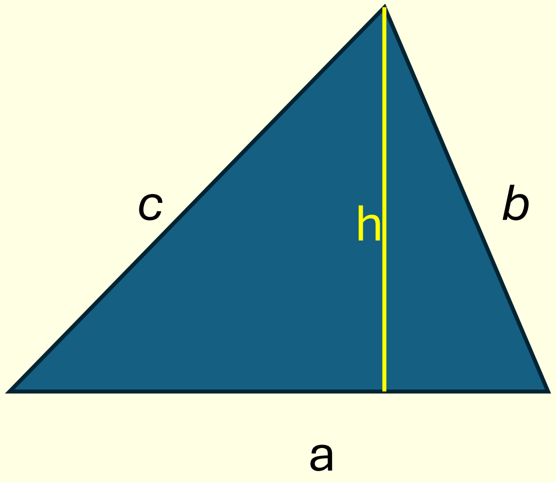


Obwód = $a + b + c$

Pole = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

Wzór na pole trójkąta:

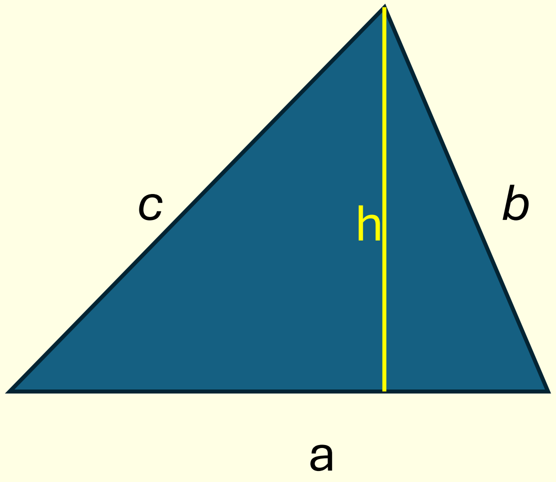
$$P = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h$$



Znasz wzór, ale czy także go rozumiesz?

Wzór na pole trójkąta:

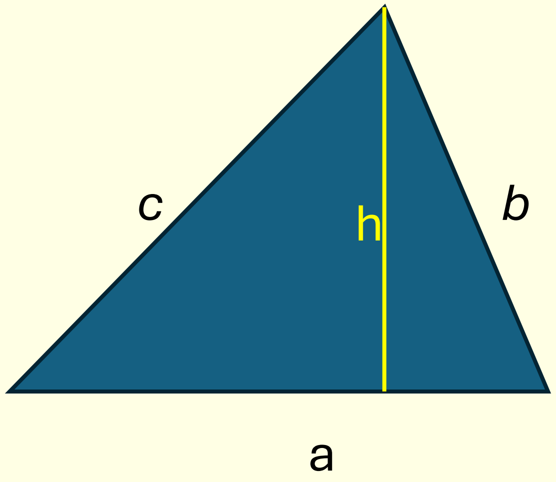
$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

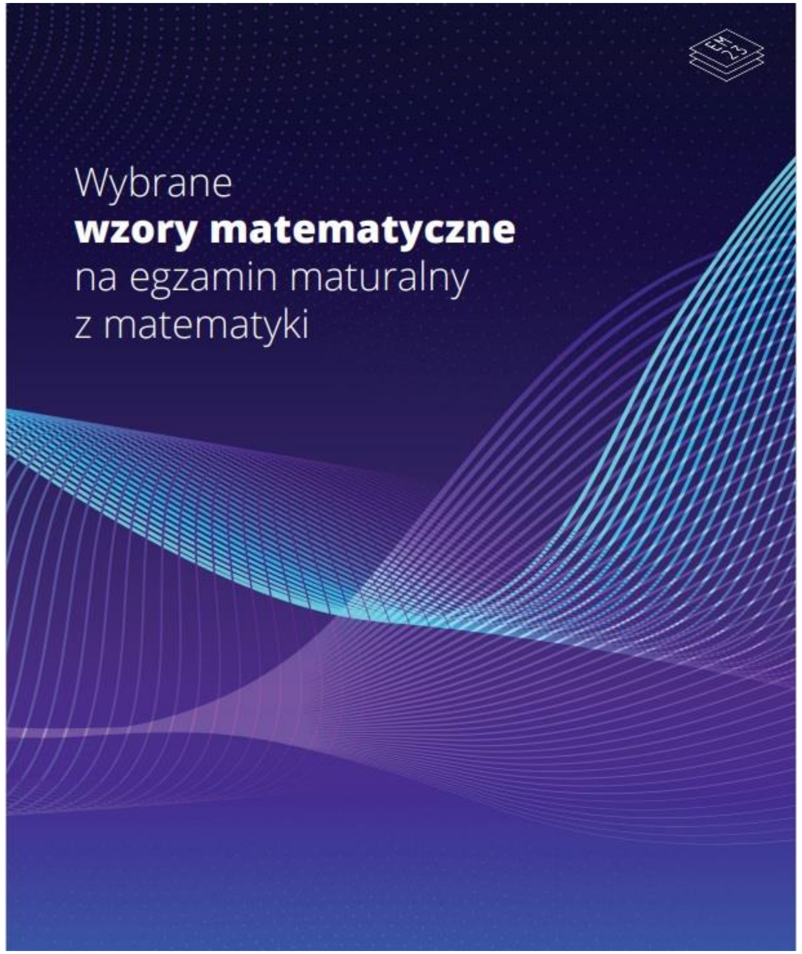


Znasz wzór, czy także go rozumiesz?

Wzór na pole trójkąta:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

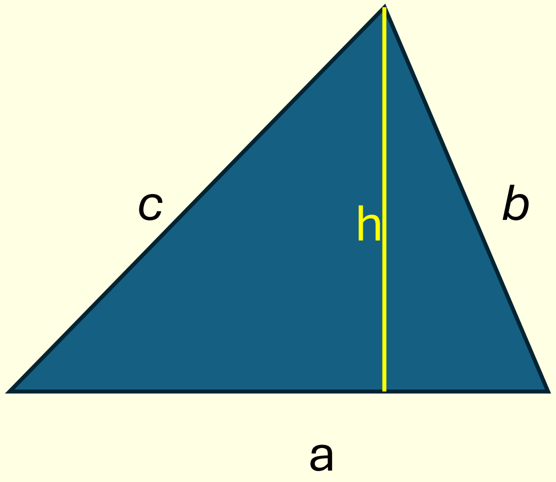




Wzór na pole trójkąta:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

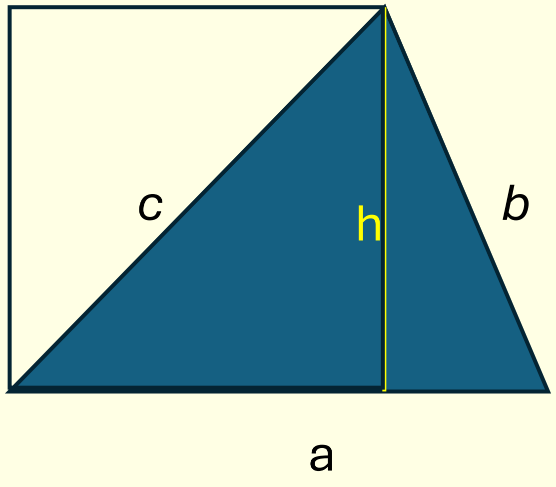
Dlaczego ½ ?



Wzór na pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

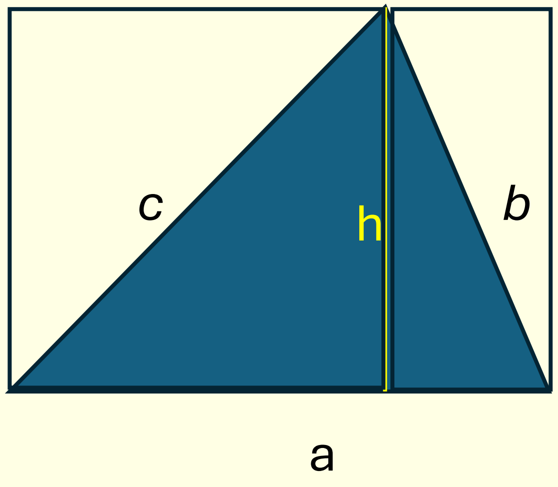
Dlaczego ½ ?



Wzór na pole trójkąta:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

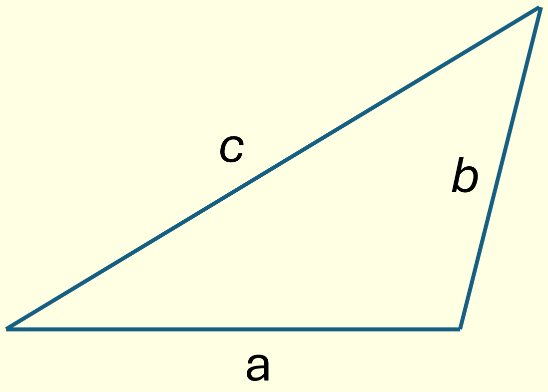
Dlaczego ½ ?



Wzór na pole trójkąta:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

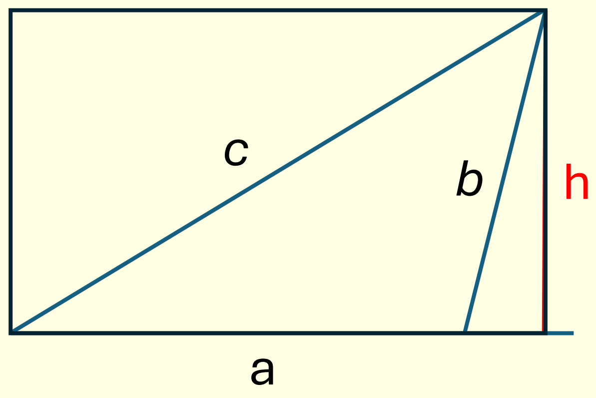
Gdzie jest **h**?



Wzór na pole trójkąta:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

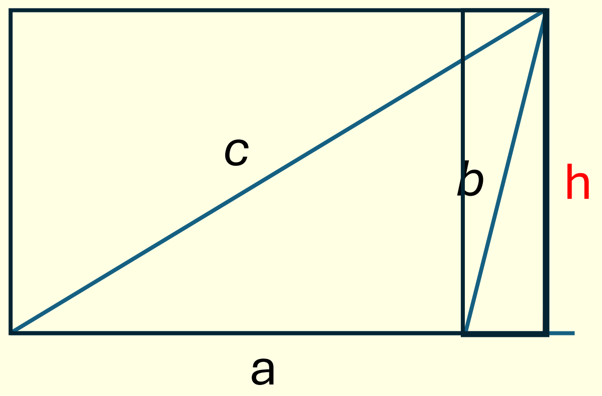
Gdzie jest **h**?



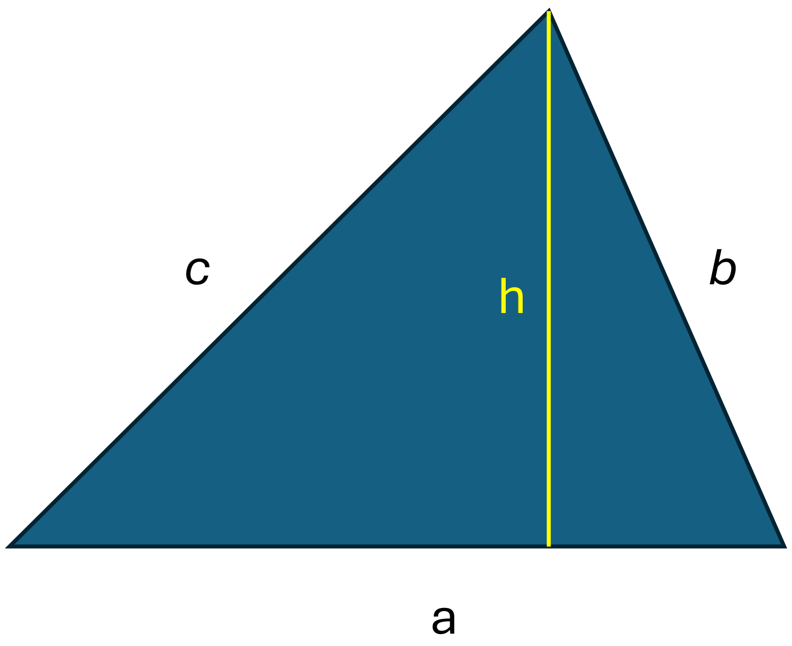
Wzór na pole trójkąta:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Gdzie jest **h**?



Jak duże, to duże. Jak małe, to małe!

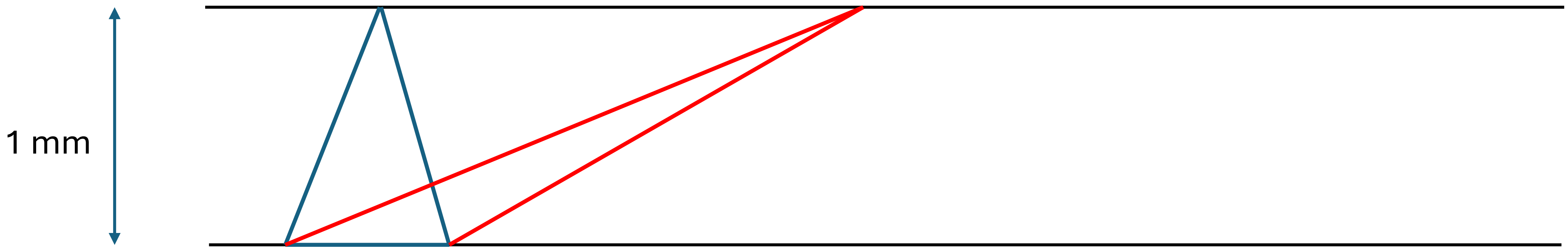


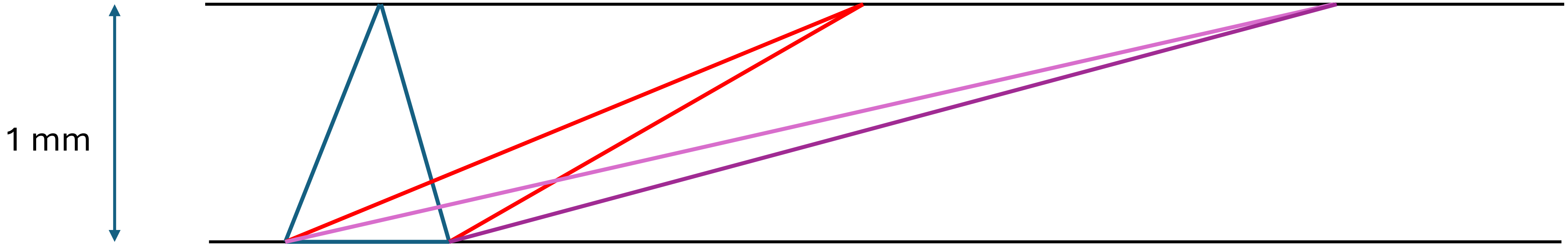
$Obwód = a + b + c$

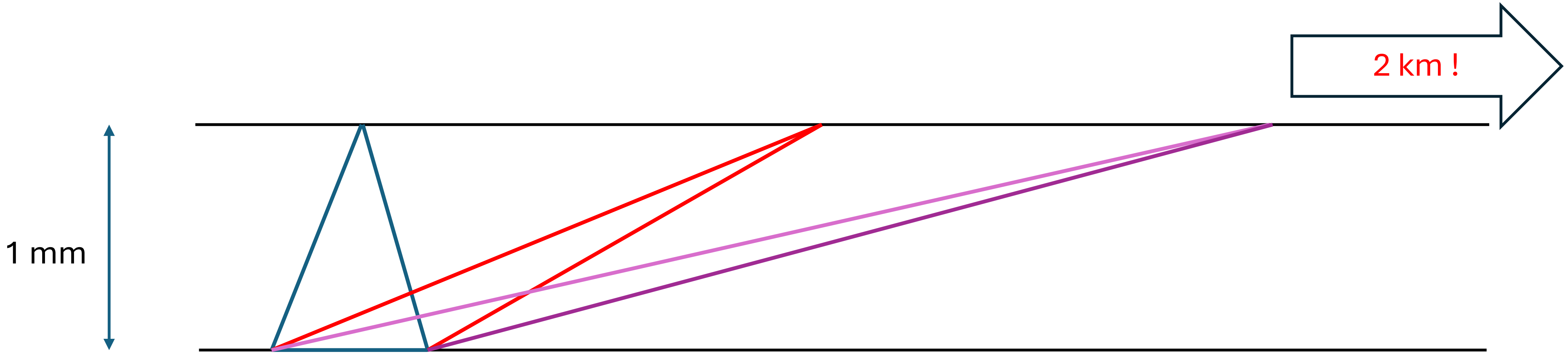
$Pole = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

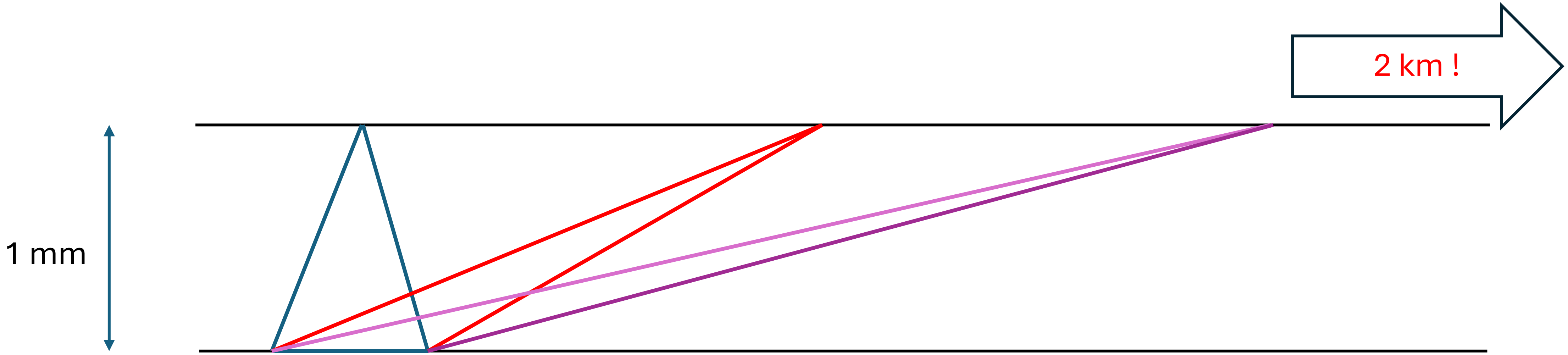
- Czy znacie wzór na pole trójkąta?
- Oczywiście, przecież chodziliśmy do szkoły!
- Czy możecie sobie wyobrazić trójkąt o polu mniejszym niż 1 milimetr kwadratowy, który ma obwód większy niż 2 kilometry?
- ????????????????????


1 mm

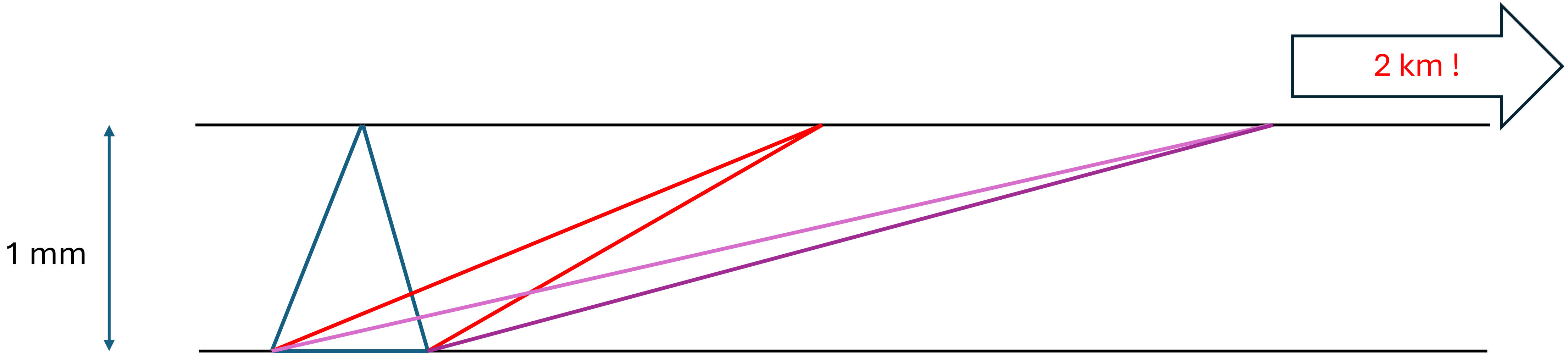

1 mm


1 mm

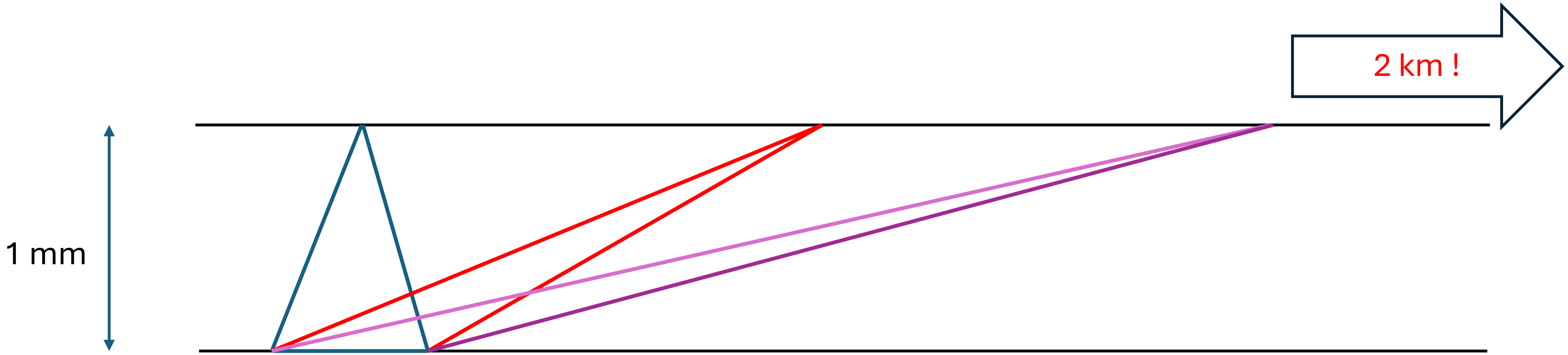

2 km !
1 mm



Trójkąt o maleńkim polu może mieć dowolnie duży obwód!



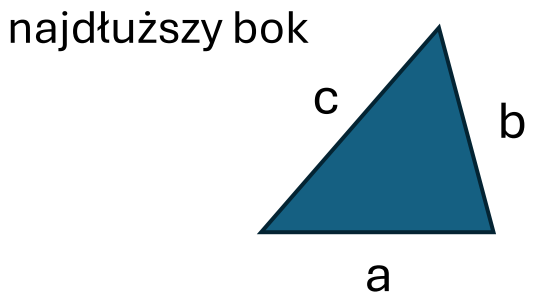
Trójkąt o maleńkim polu może mieć dowolnie duży obwód!



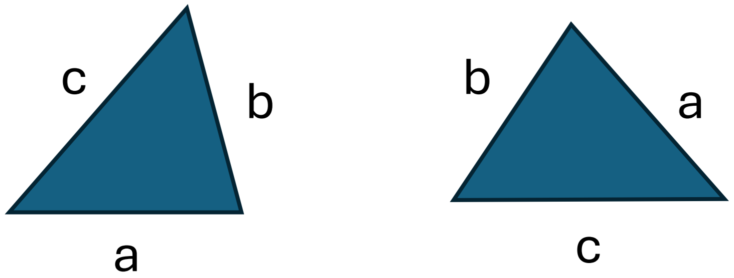
Trójkąt o maleńkim polu może mieć dowolnie duży obwód!

A czy znajdziemy trójkąt o maleńkim obwodzie i ogromnym polu?

A czy znajdziemy trójkąt o maleńkim obwodzie i ogromnym polu?

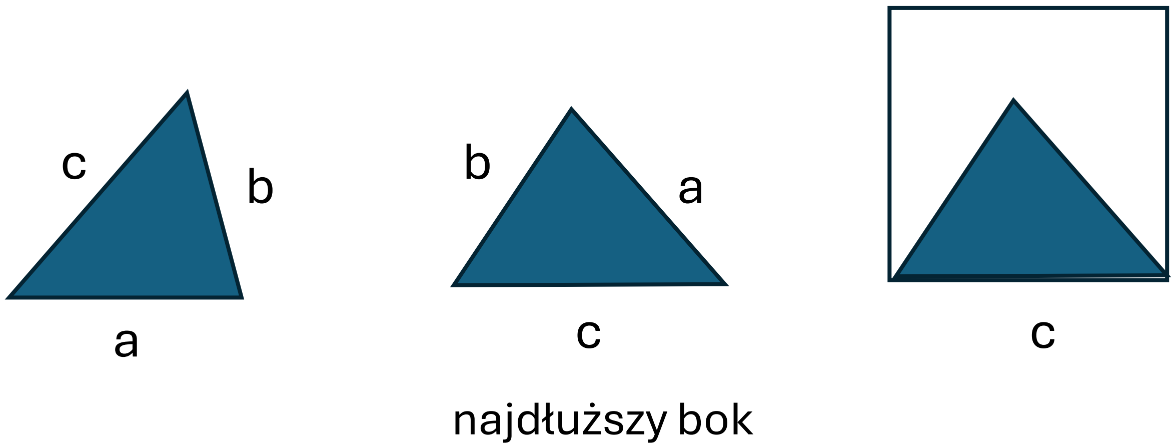


A czy znajdziemy trójkąt o maleńkim obwodzie i ogromnym polu?

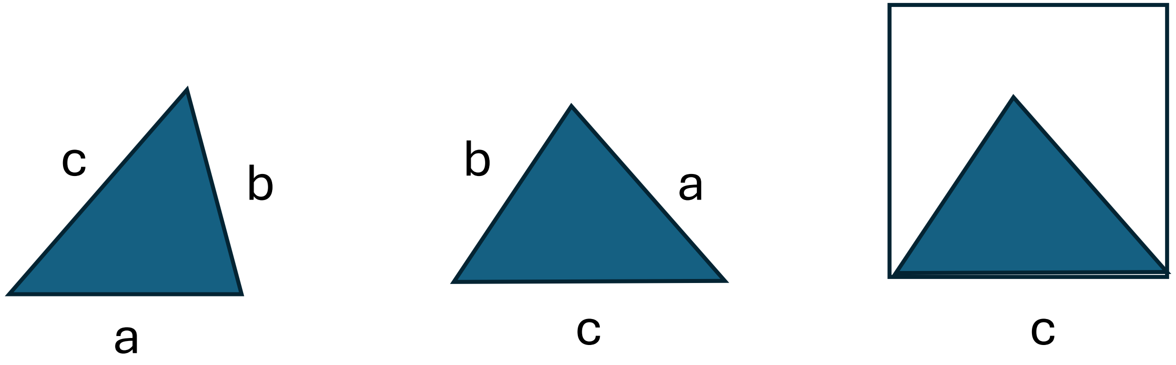


najdłuższy bok

A czy znajdziemy trójkąt o maleńkim obwodzie i ogromnym polu?



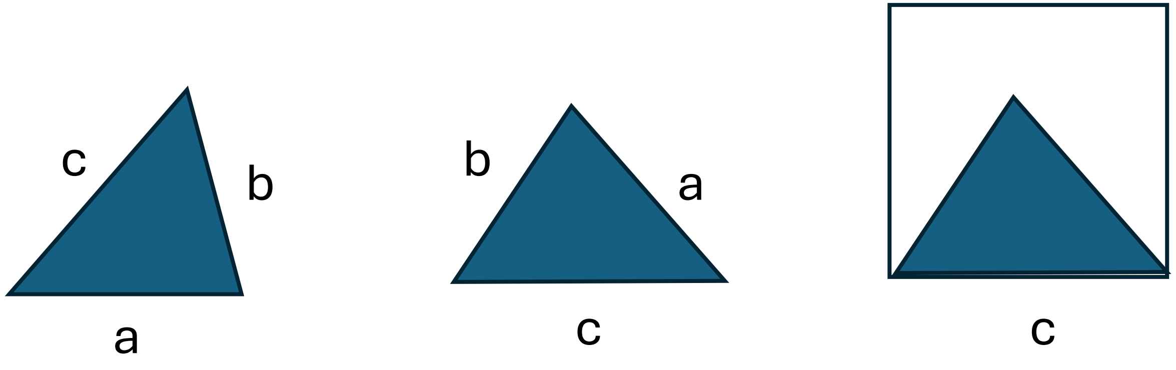
A czy znajdziemy trójkąt o maleńkim obwodzie i ogromnym polu?



najdłuższy bok

$\text{Pole} < c \cdot c$

A czy znajdziemy trójkąt o maleńkim obwodzie i ogromnym polu?



najdłuższy bok

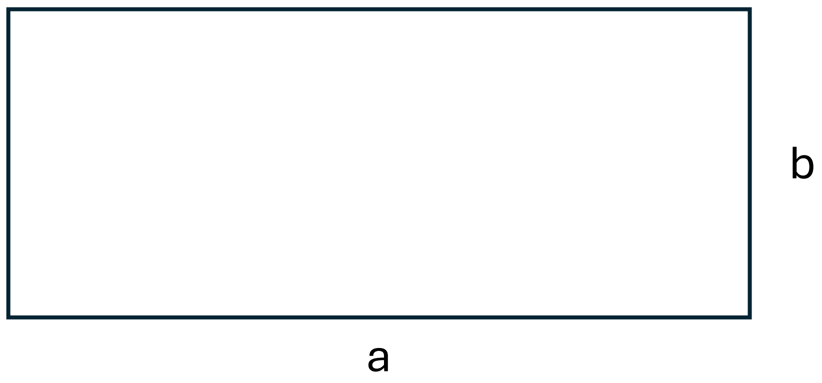
Pole < c·c

maleńki obwód → maleńki odcinek c → maleńkie pole

Zadanie praktyczne: mamy określony zapas ogrodzenia i chcemy nim ograniczyć jak największy prostokątny obszar. Jaka powinna być proporcja boków tego prostokąta?

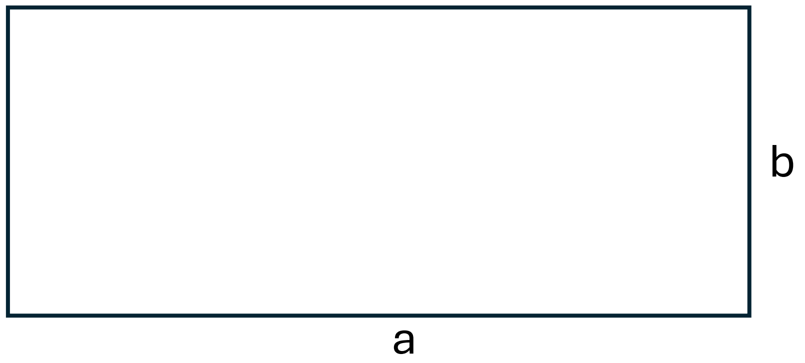
Rozwiązanie:

Zbadajmy prostokąt o bokach $a>b$.

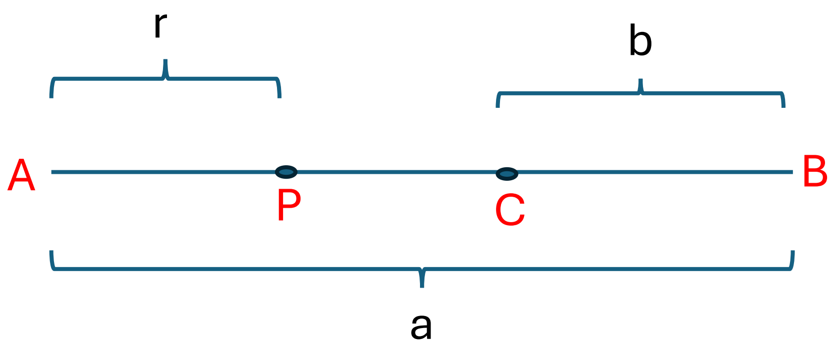


Rozwiązanie:

Zbadajmy prostokąt o bokach a>b.



Na odcinku AB długości a odłóżmy odcinek CB długości b:

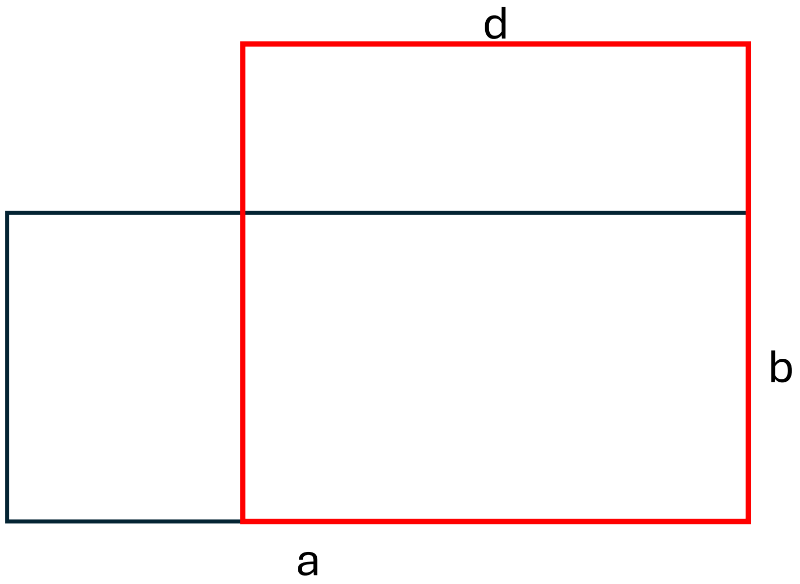


Niech punkt P dzieli odcinek AC na połowy długości r.

Oznaczmy literą d długość odcinka PB.

Wtedy a=d+r, b=d – r.

Pole prostokąta = a·b = (d+r)(d-r)=d·d-r·r < d·d.



Pośród prostokątów o ustalonym obwodzie największe pole ma kwadrat.

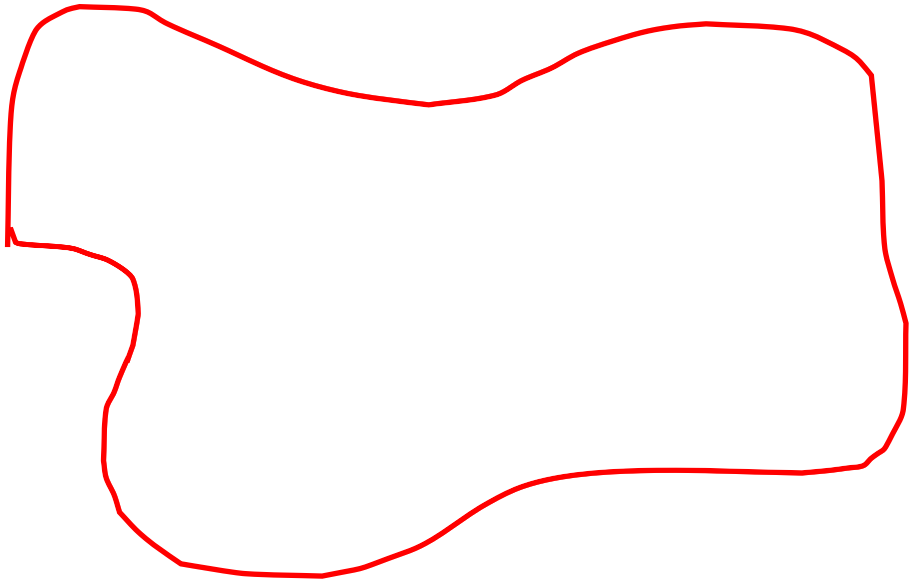
Problem Dydony

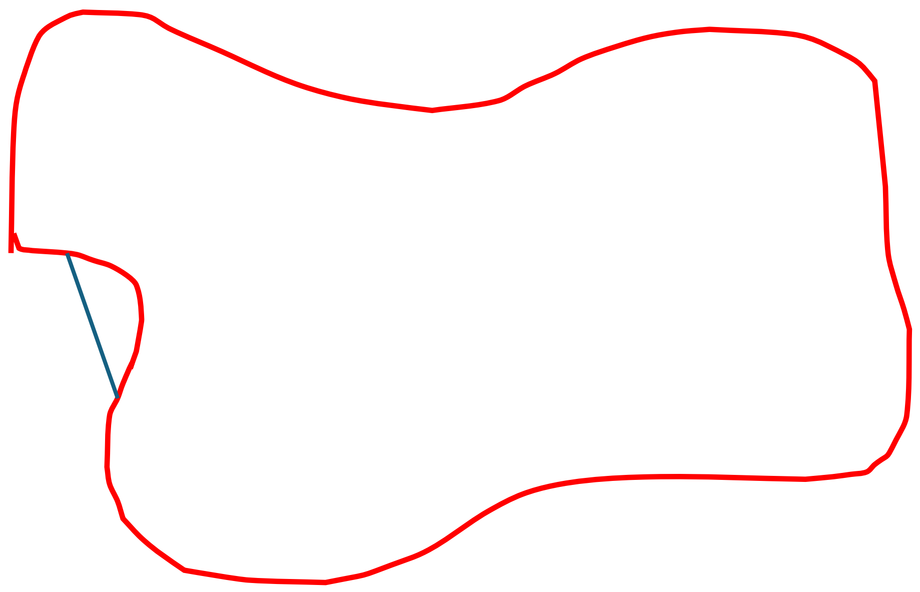
Fenicjanka Dydona uciekła w IX wieku p.n.e. z Tyru na północne wybrzeże Afryki, gdzie założyła Kartaginę.

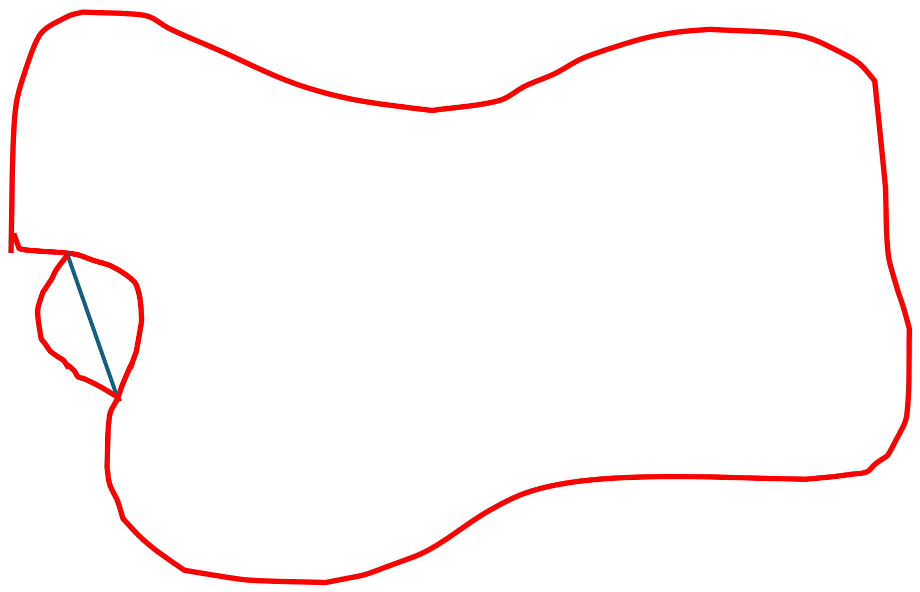
Miejscowi Berberowie pozwolili jej zająć tyle terenu pod nowe miasto, ile obejmie skóra wołu. Dydona niezrażona tą złośliwością, pocięła skórę wołu na cienkie paseczki i zrobiła z nich długą pętlę.

Problem Dydony:

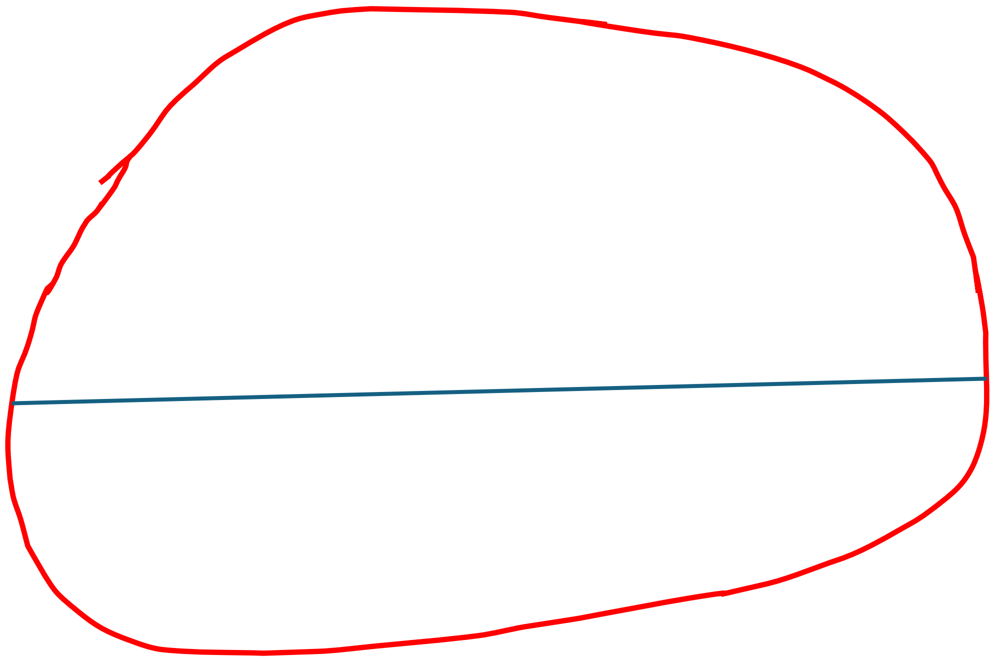
Jaki kształt nadała swojej pętli, by objąć jak największą powierzchnię?



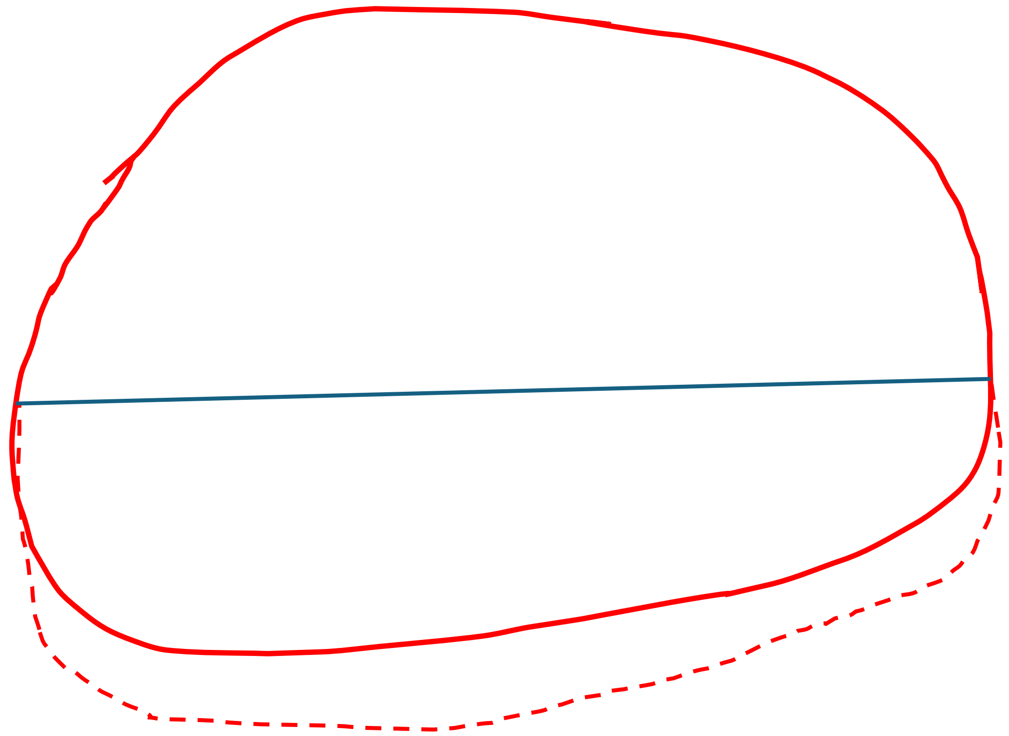




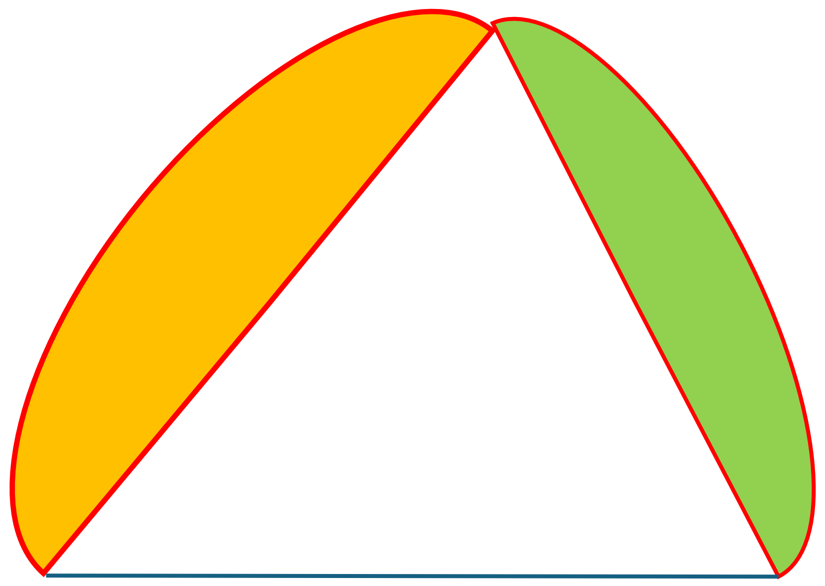
Jeśli nasza figura nie jest wypukła, to można zwiększyć jej pole, nie zmieniając obwodu.

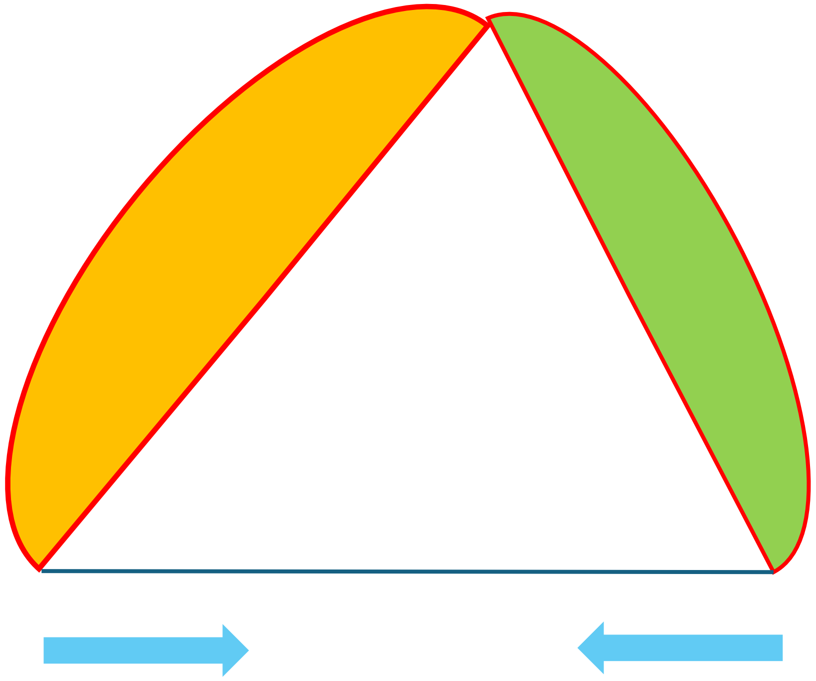


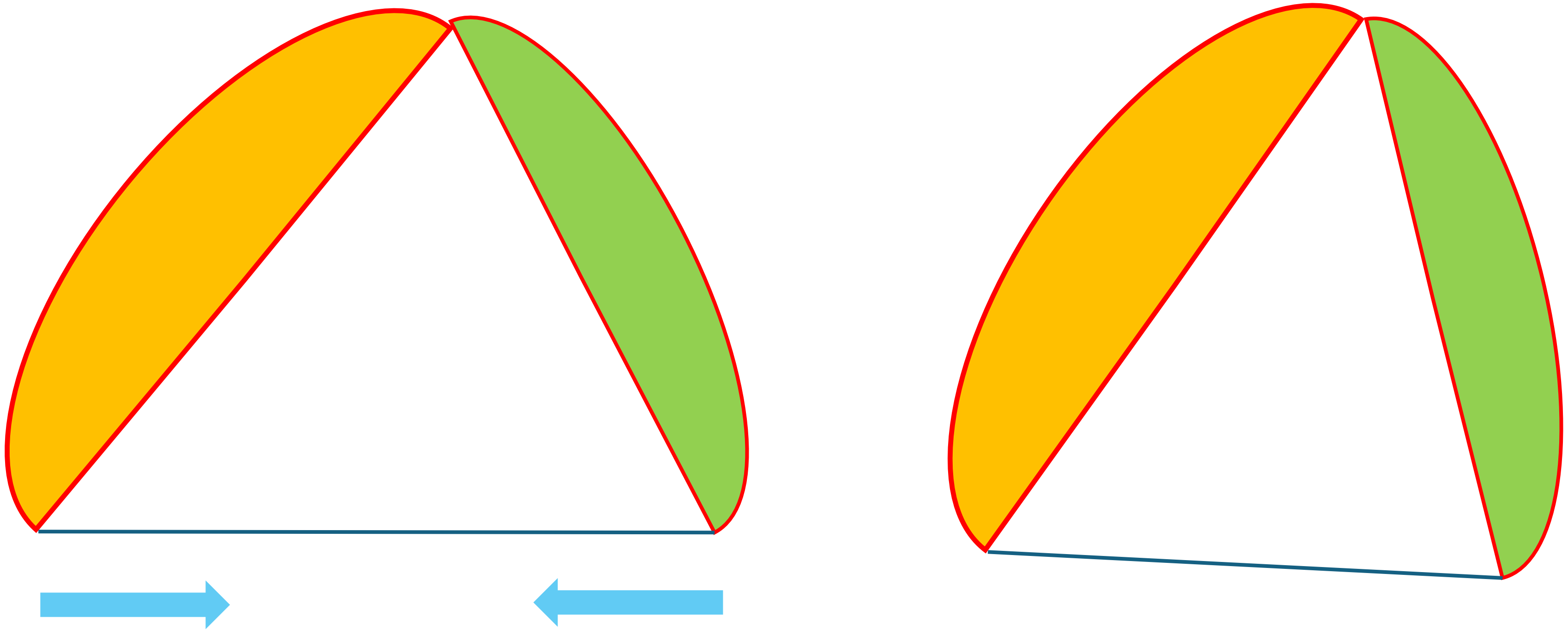
Jeśli końce zielonej linii dzielą obwód na pół, to ta linia rozcina pole na pół,
albo Dydona może uzyskać większe pole.

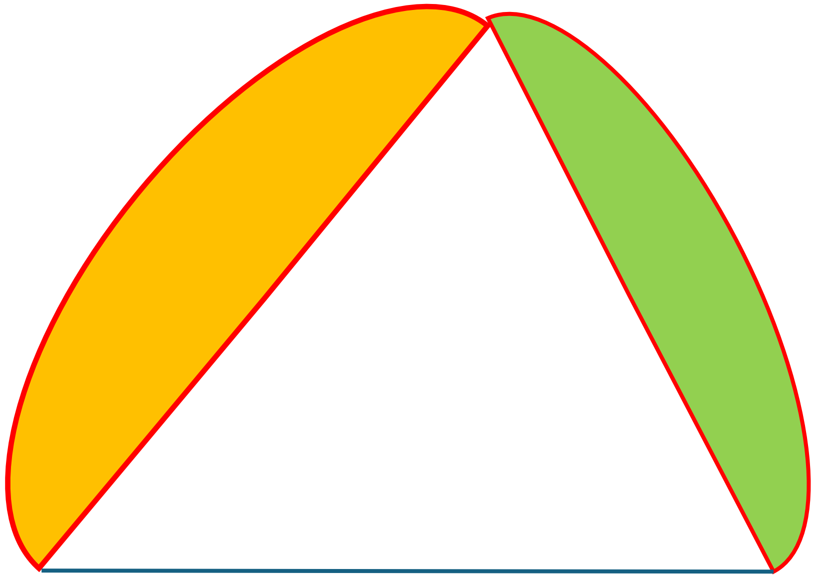


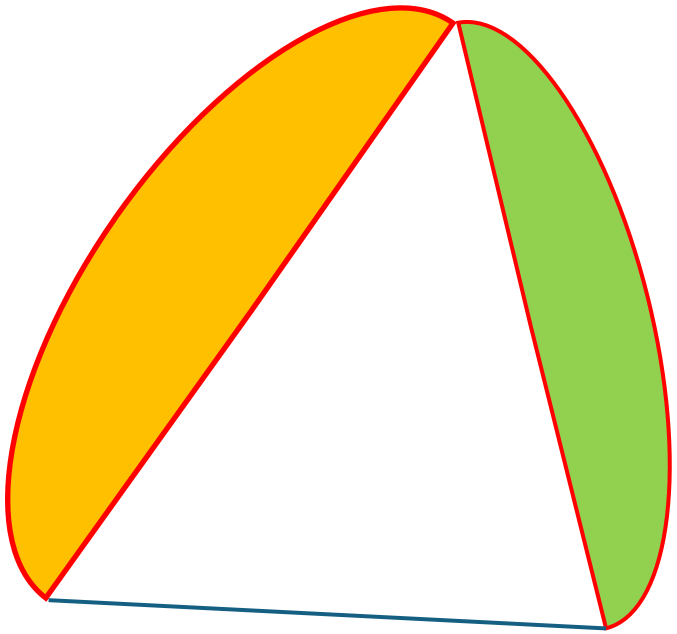
Jeśli końce zielonej linii dzielą obwód na pół, to ta linia rozcina pole na pół,
albo Dydona może uzyskać większe pole.

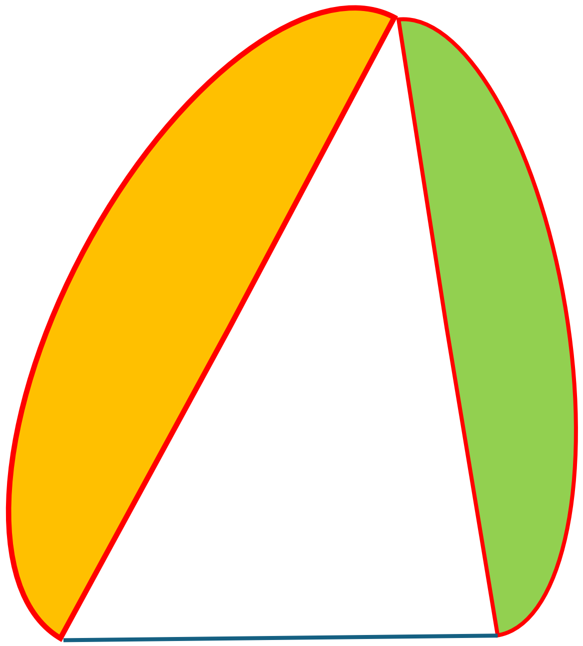


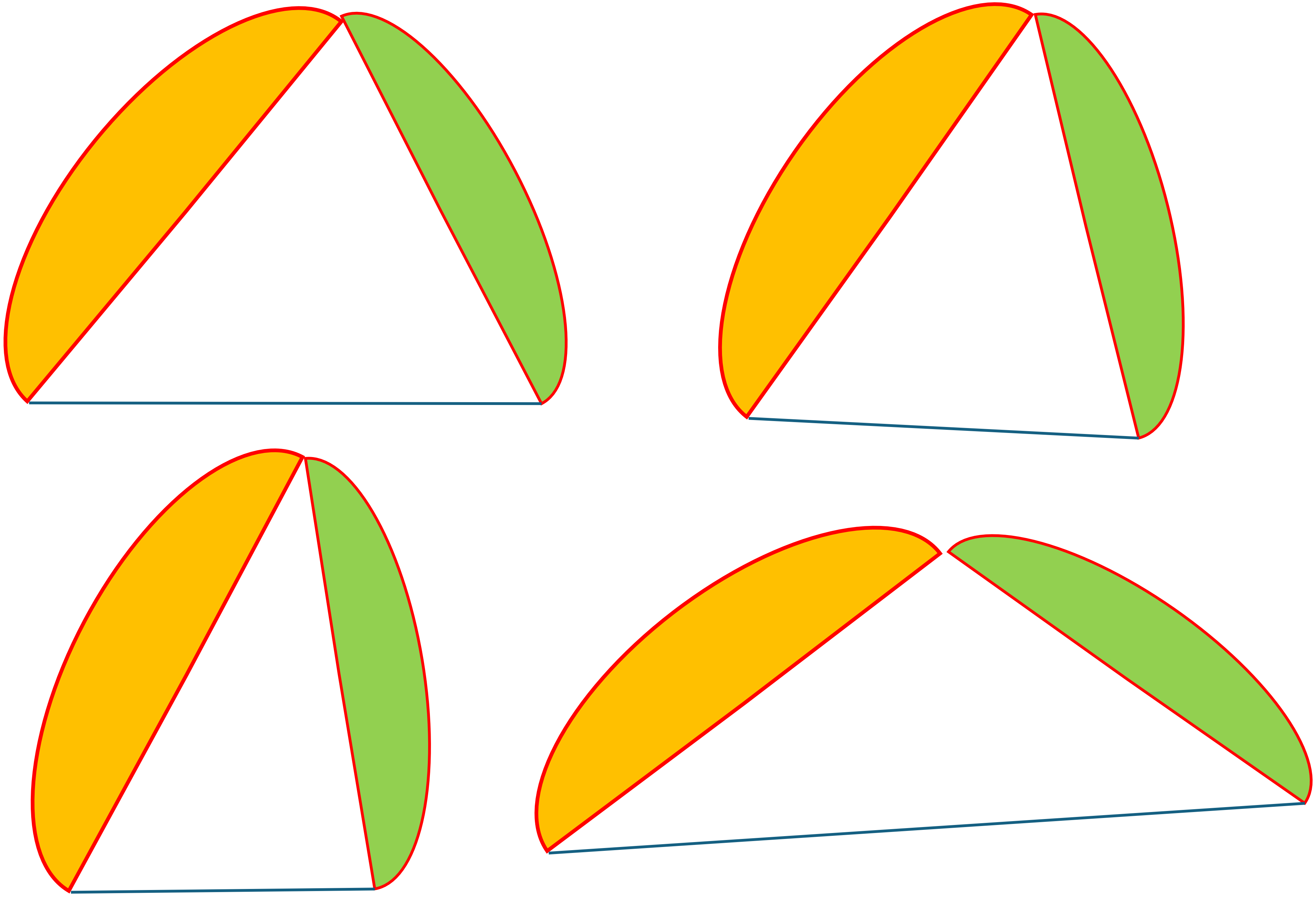


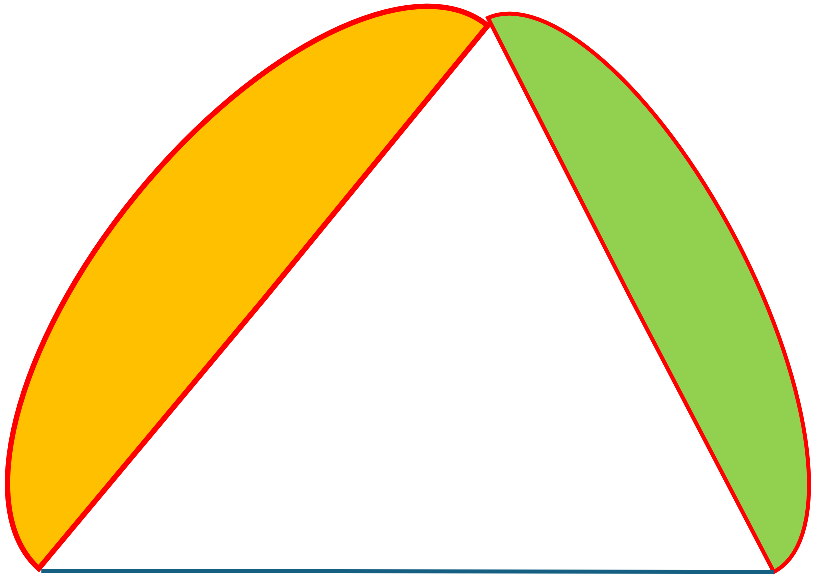


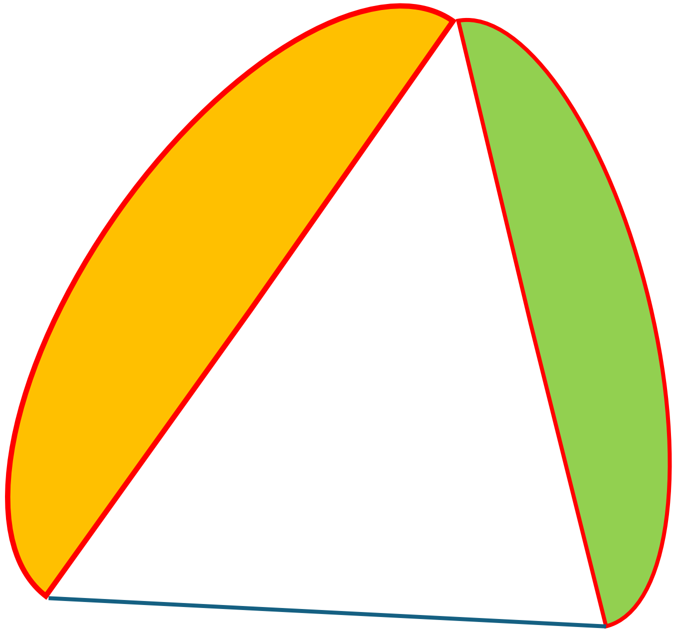




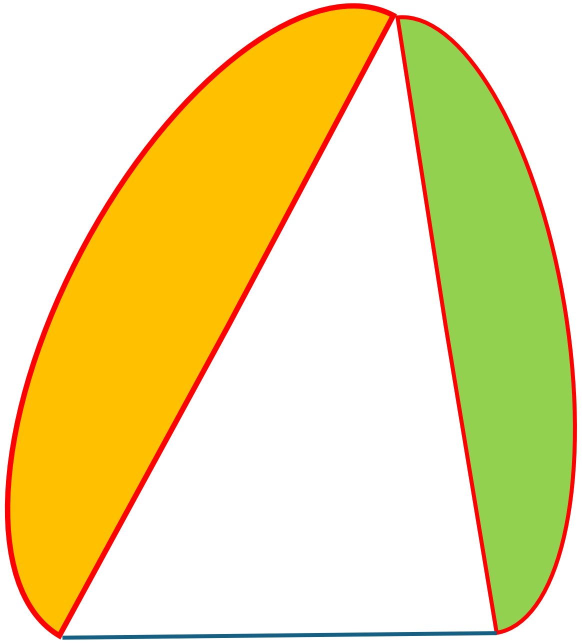


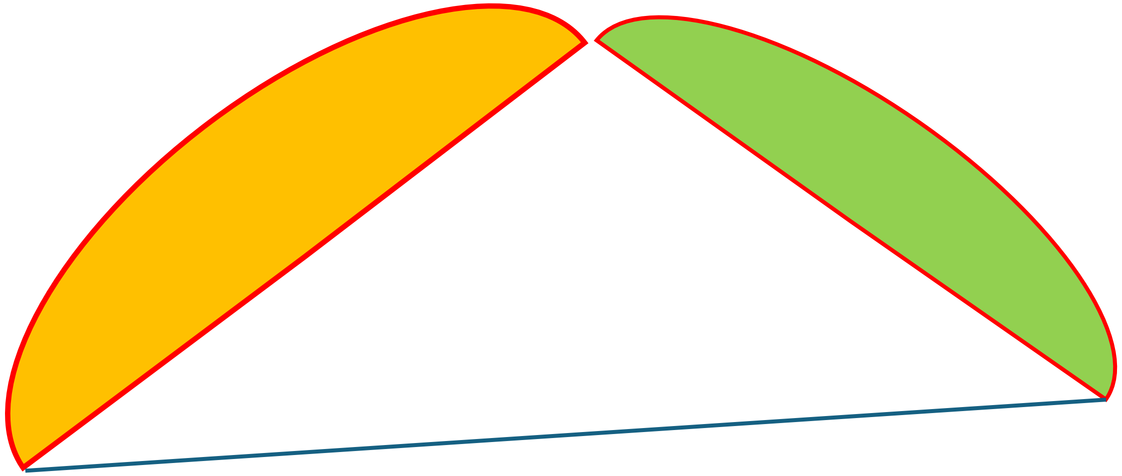


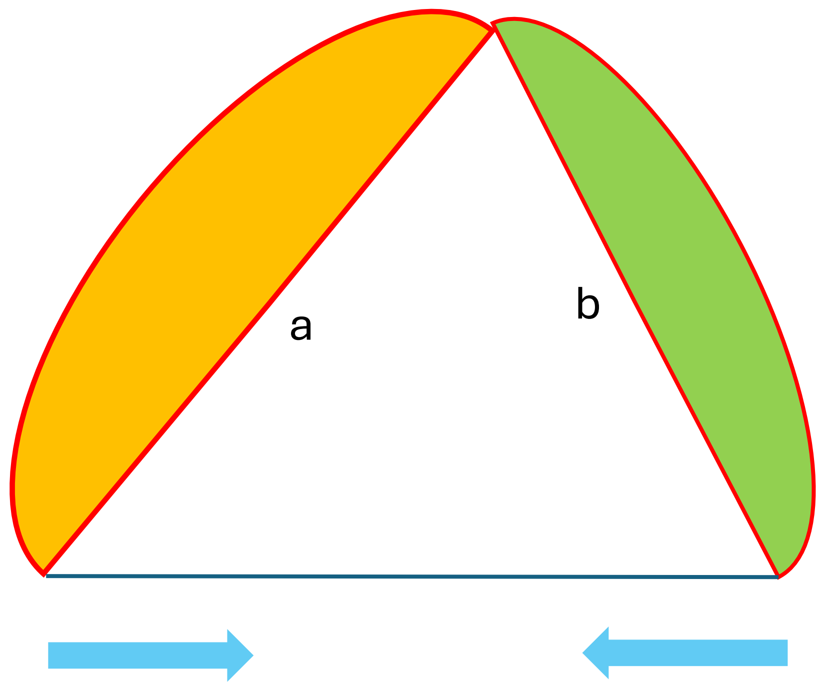


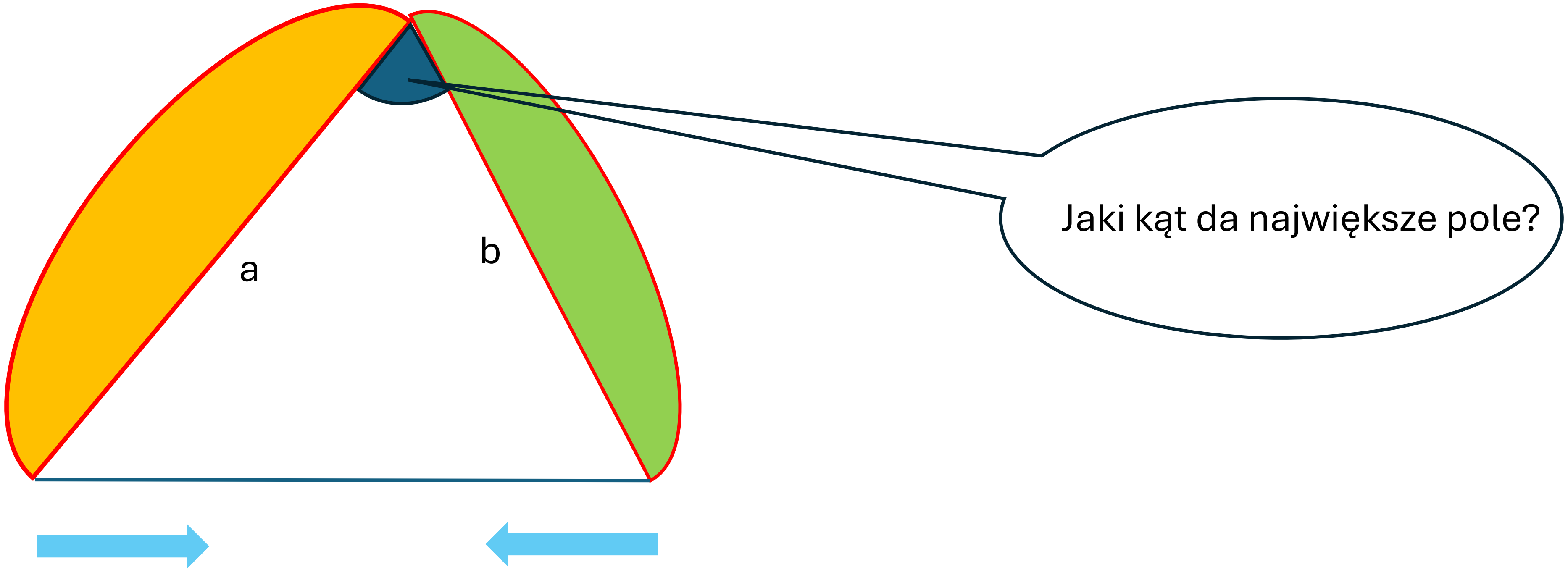


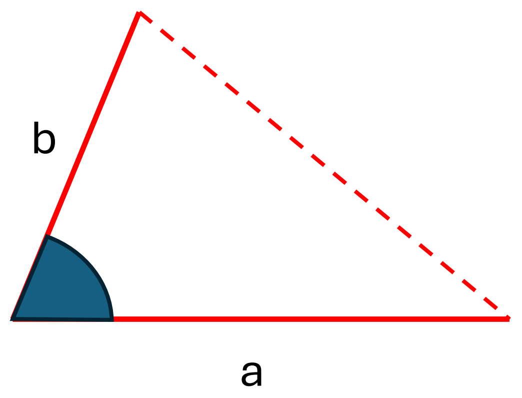
Który wybór da największe pole?

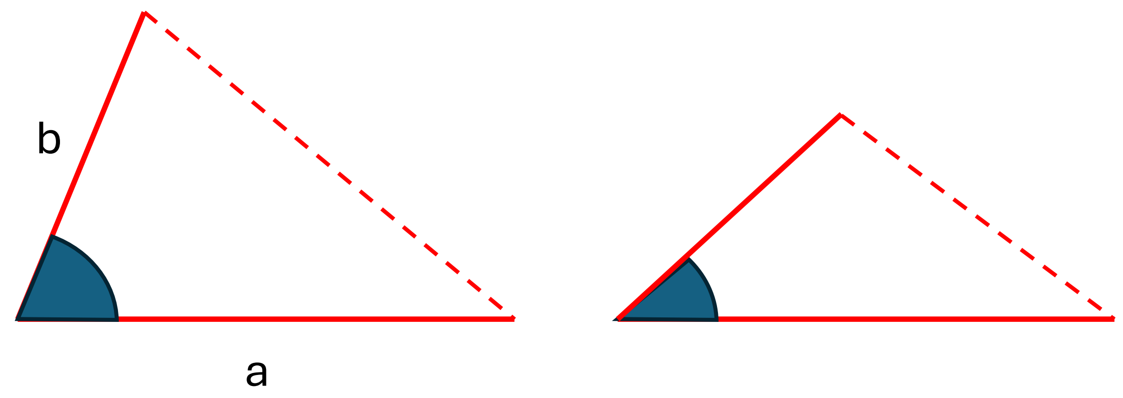


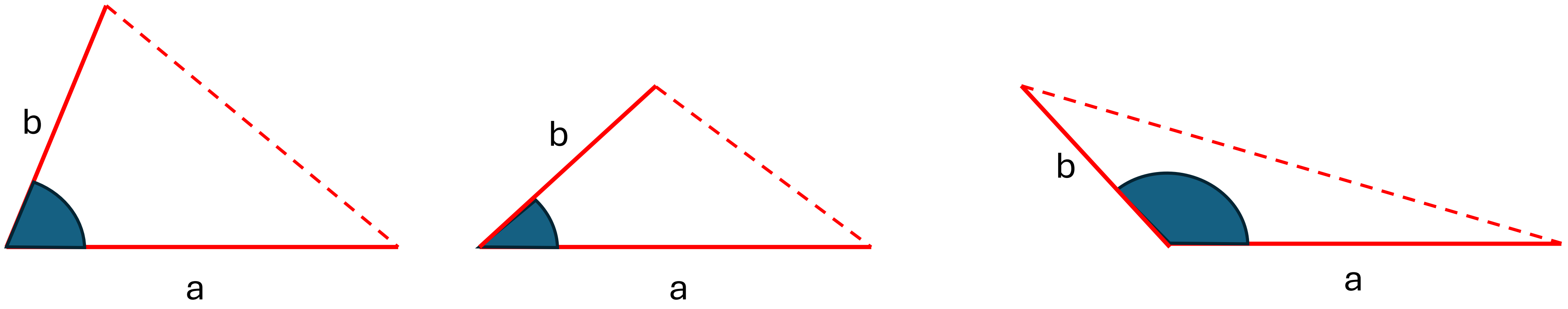


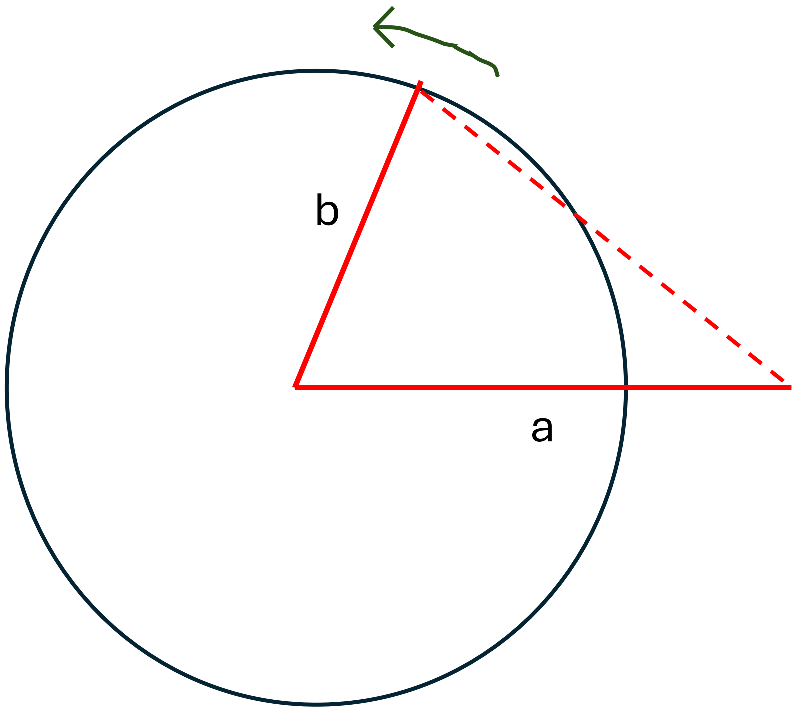

a
b


a
b
Jaki kąt da największe pole?

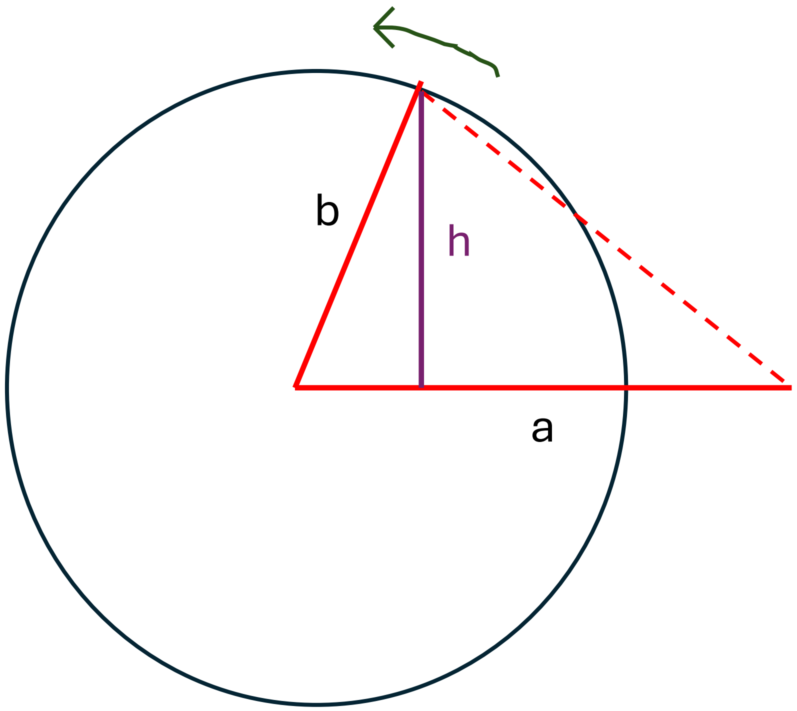

b
a


b
a

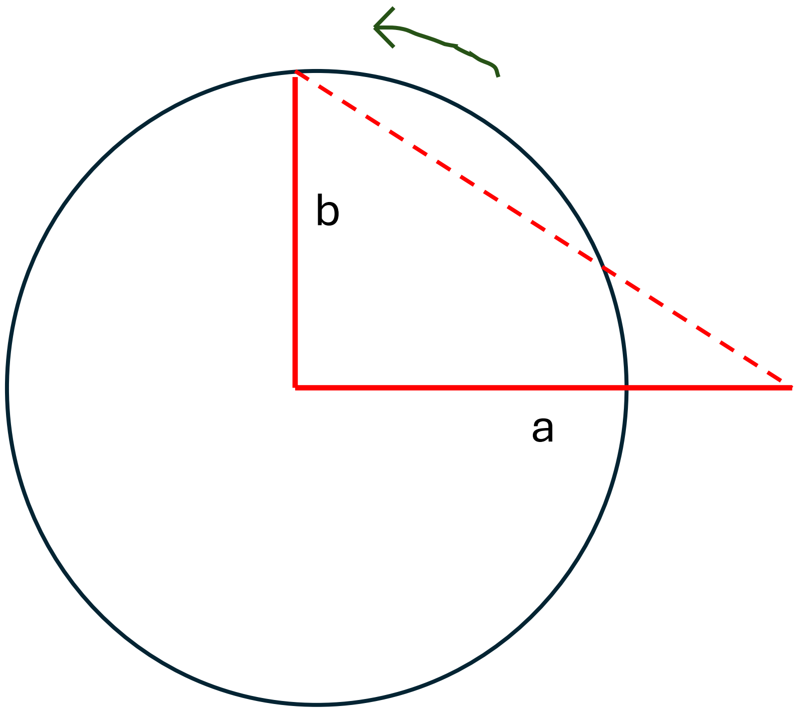

b
a
b
a
b
a



W którym położeniu odcinka b pole czerwonego trójkąta będzie największe?

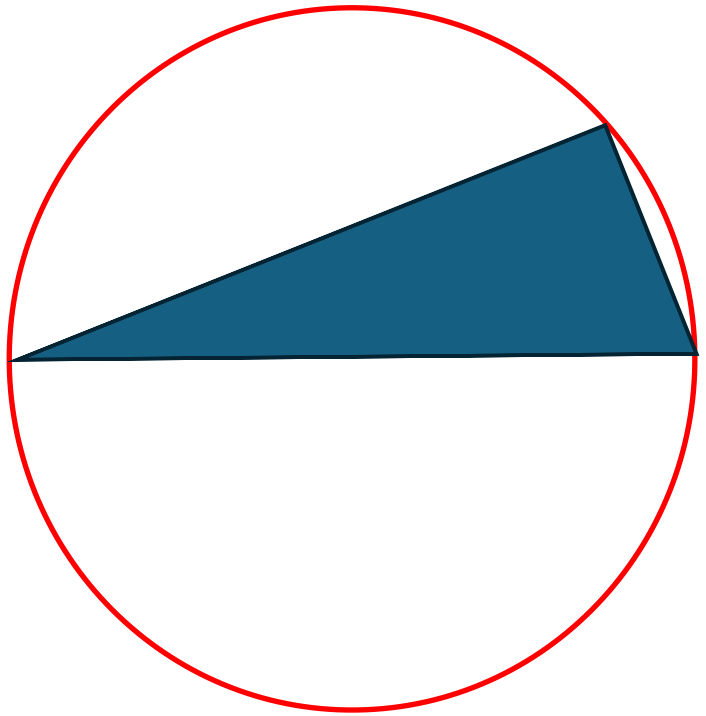


W którym położeniu odcinka b wysokość h trójkąta będzie największa?



W którym położeniu odcinka b wysokość h trójkąta będzie największa?

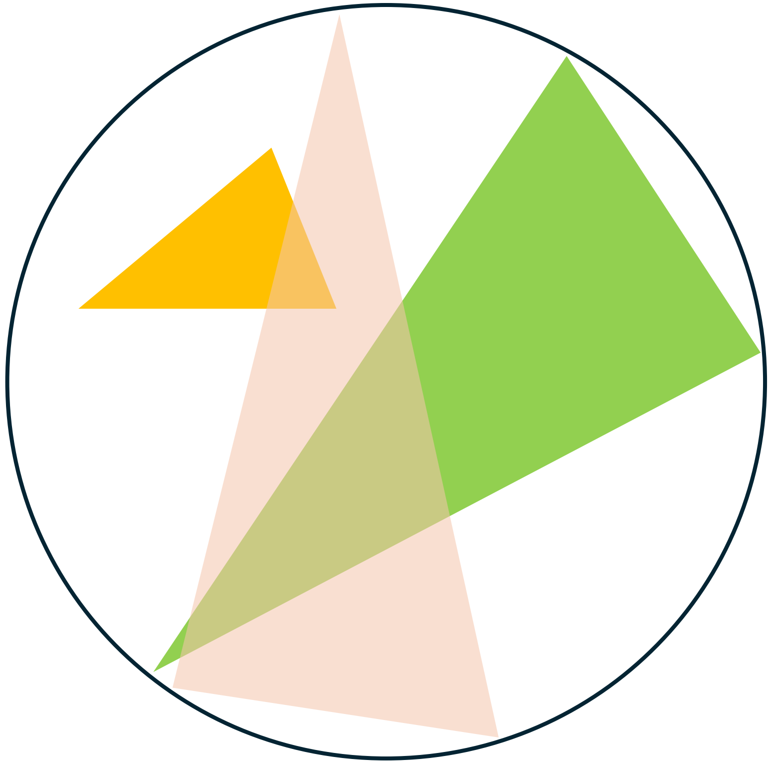
Gdy odcinki a, b tworzą kąt prosty.



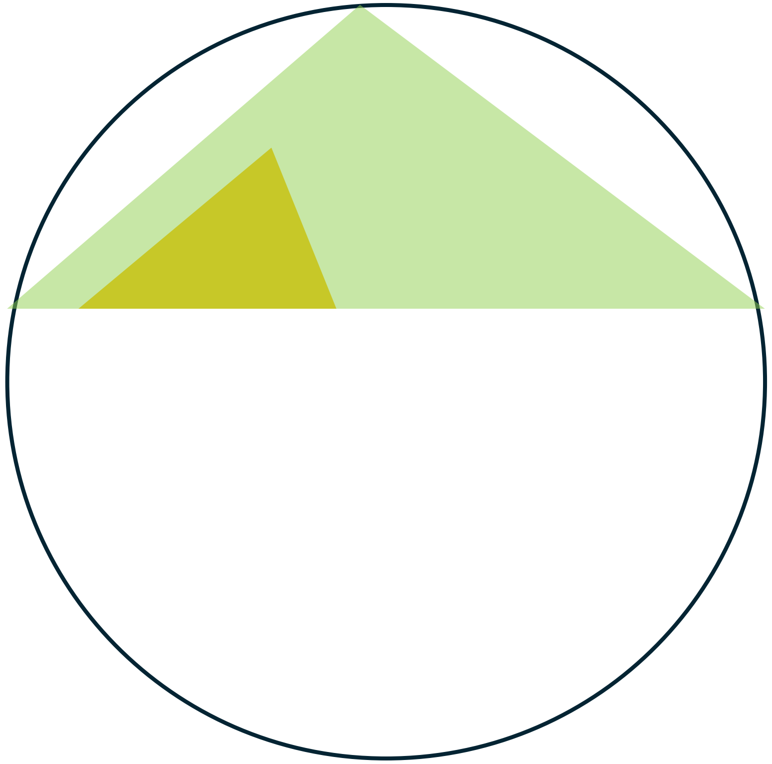
Dydona powinna uformować swoją linę tak, by każdy kąt oparty na średnicy był prosty.

Taka figura jest okręgiem.

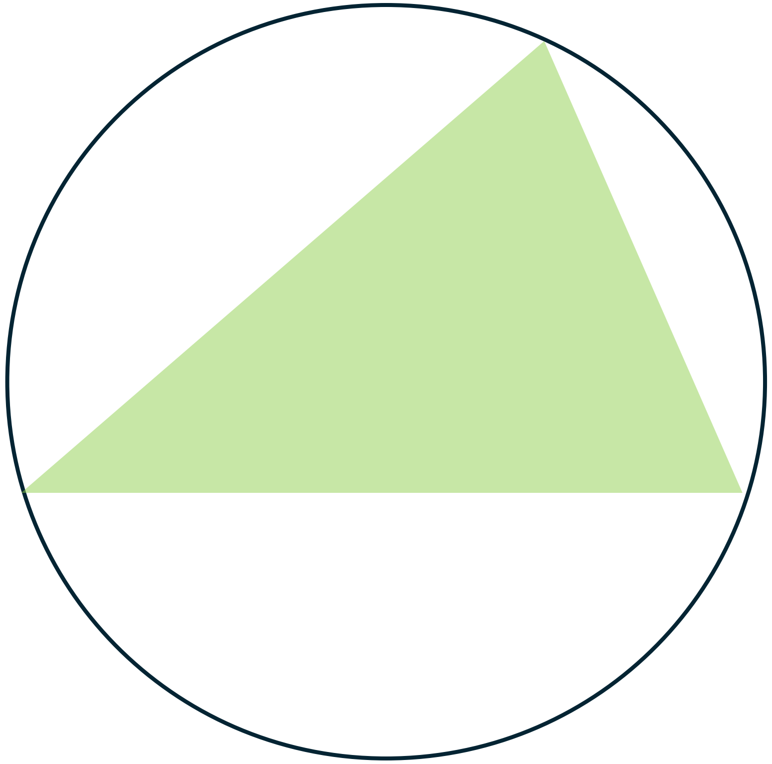
Mamy ustalony okrąg. Jaki trójkąt zawarty w tym kole ma największe pole?



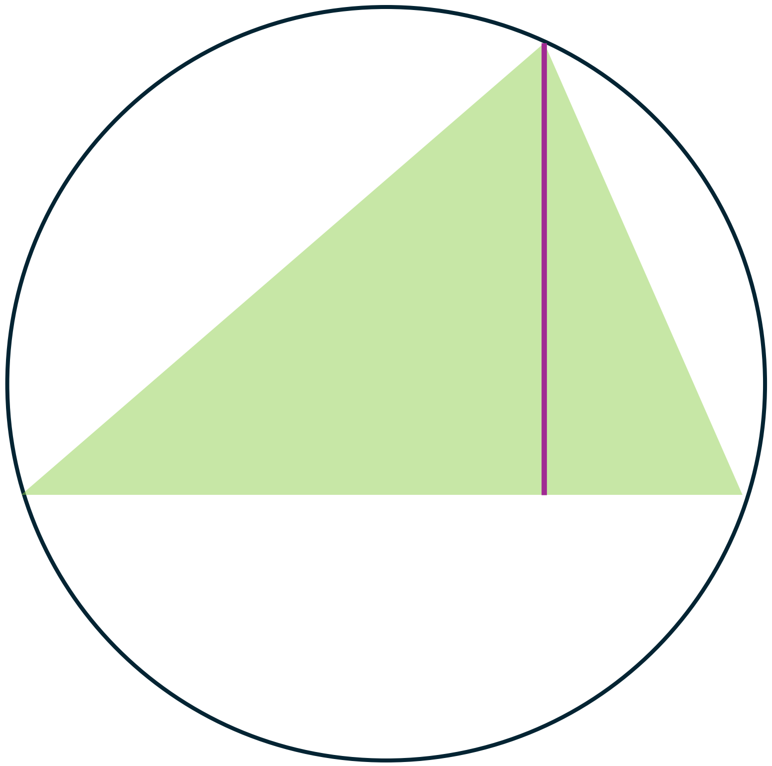
Wystarczy zbadać trójkąty wpisane w ten okrąg.



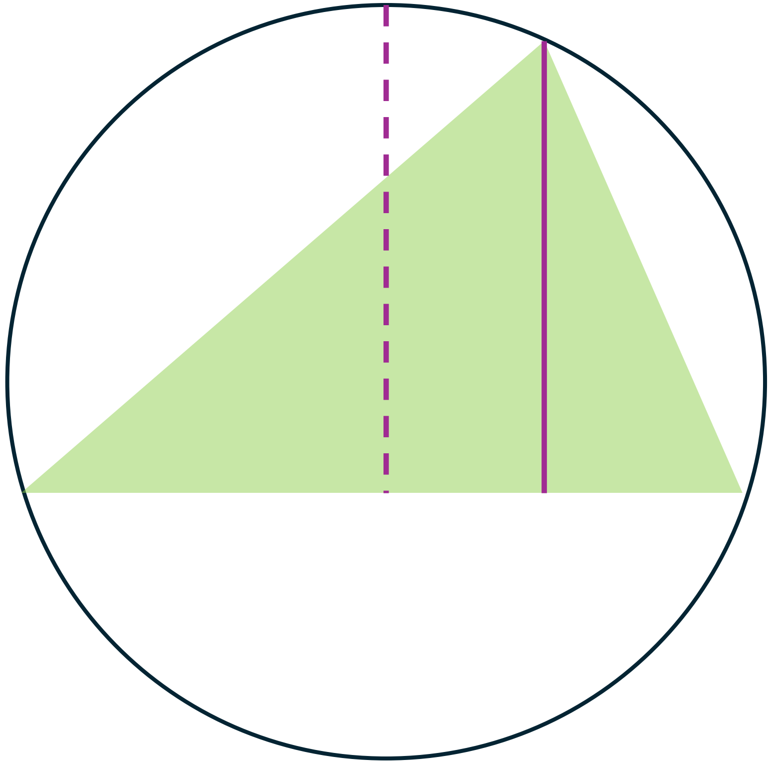
Czy ten trójkąt ma największe pole?



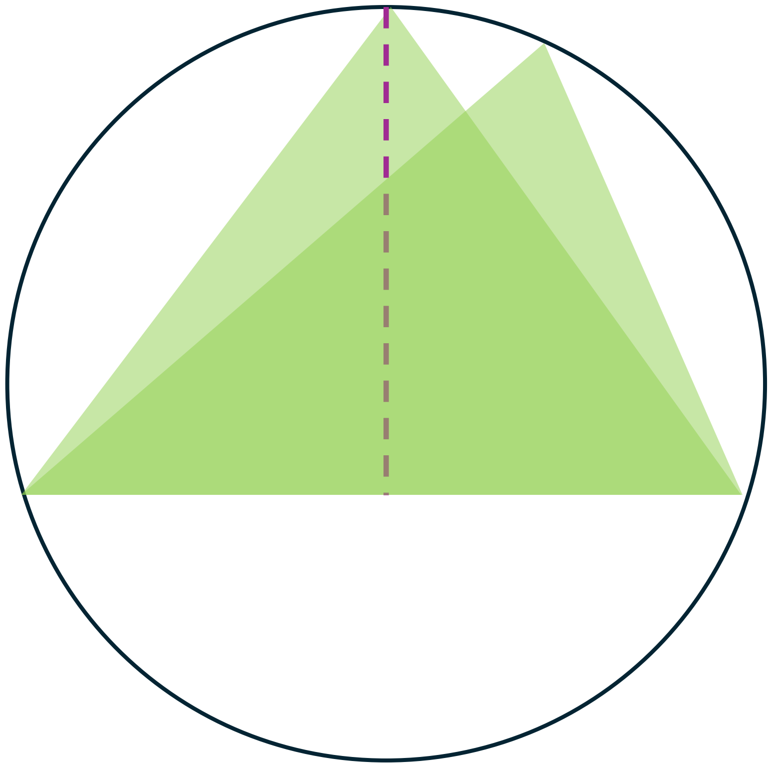
Czy ten trójkąt ma największe pole?



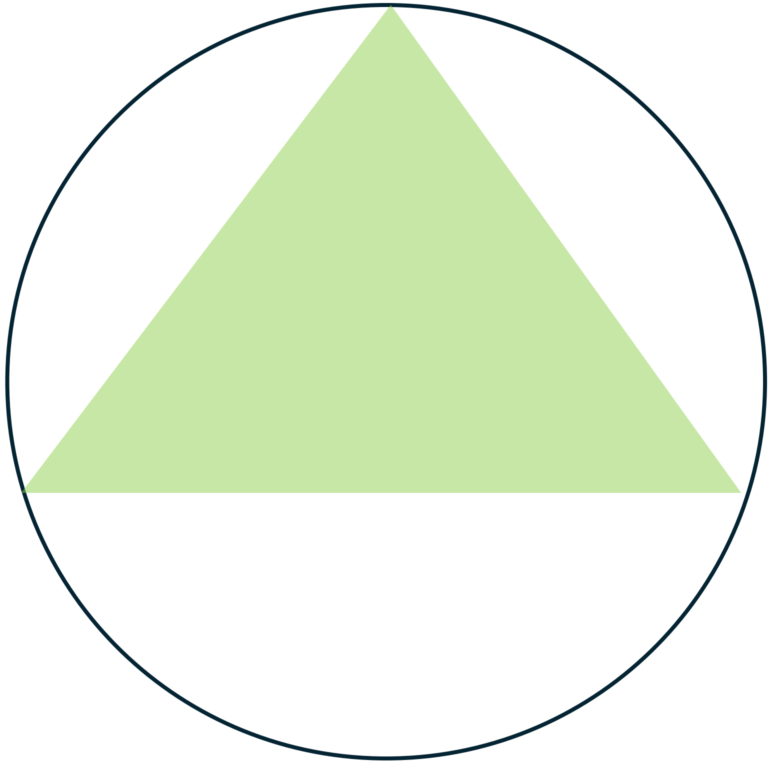
Czy ten trójkąt ma największe pole?



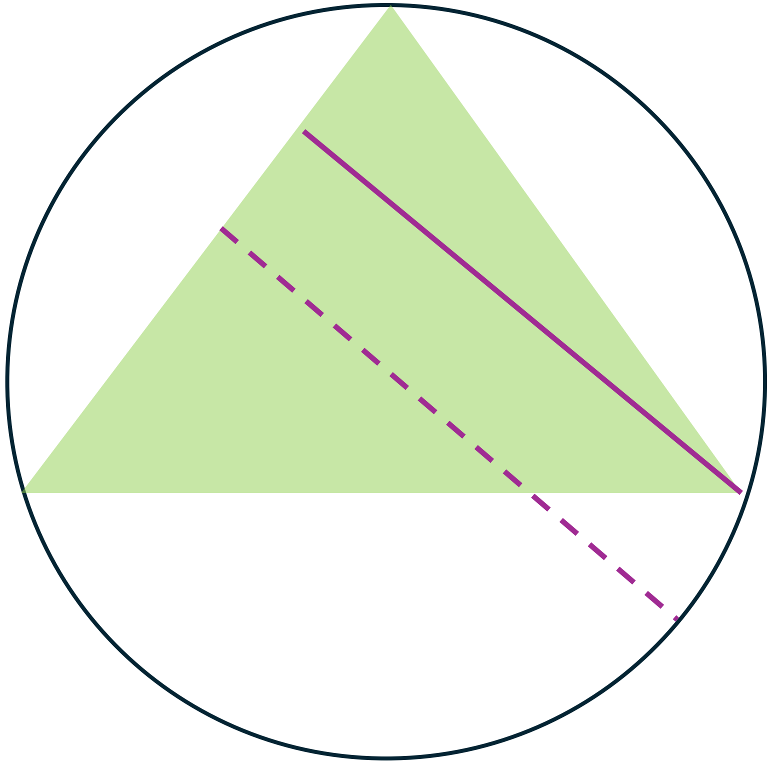
Czy ten trójkąt ma największe pole?



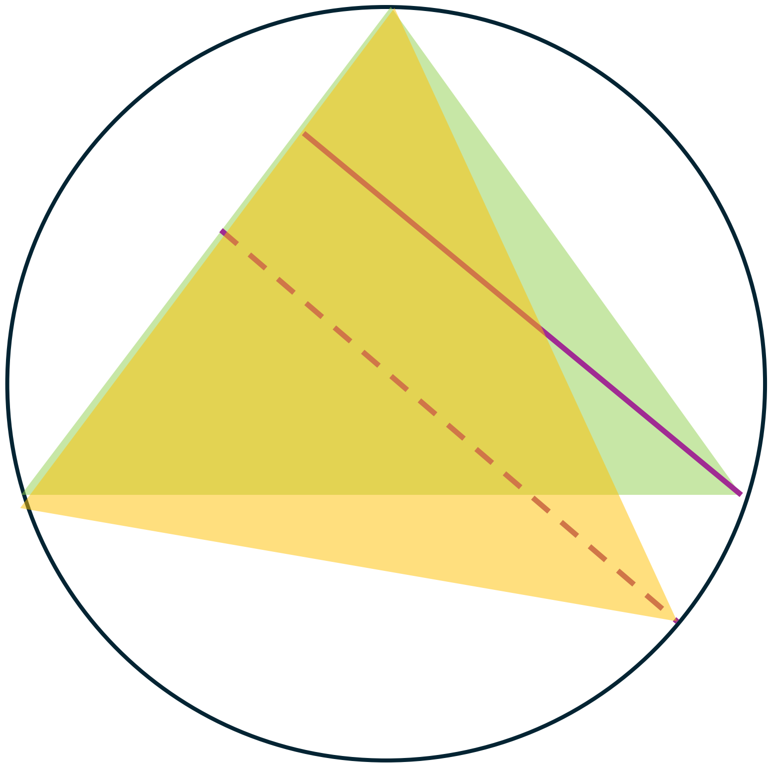
Czy ten trójkąt ma największe pole?



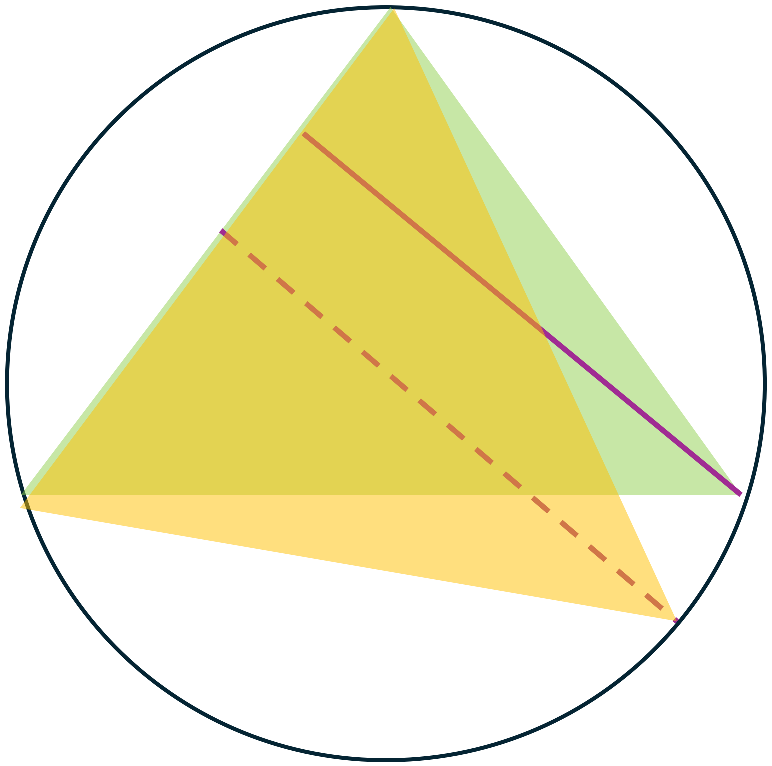
Czy ten trójkąt ma największe pole?



Czy ten trójkąt ma największe pole?

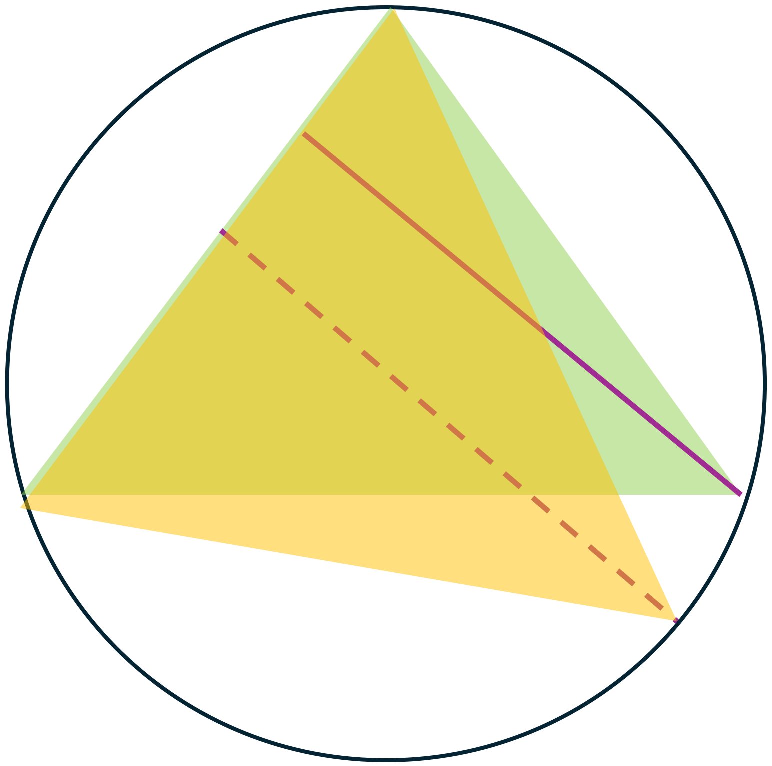


Czy ten trójkąt ma największe pole?



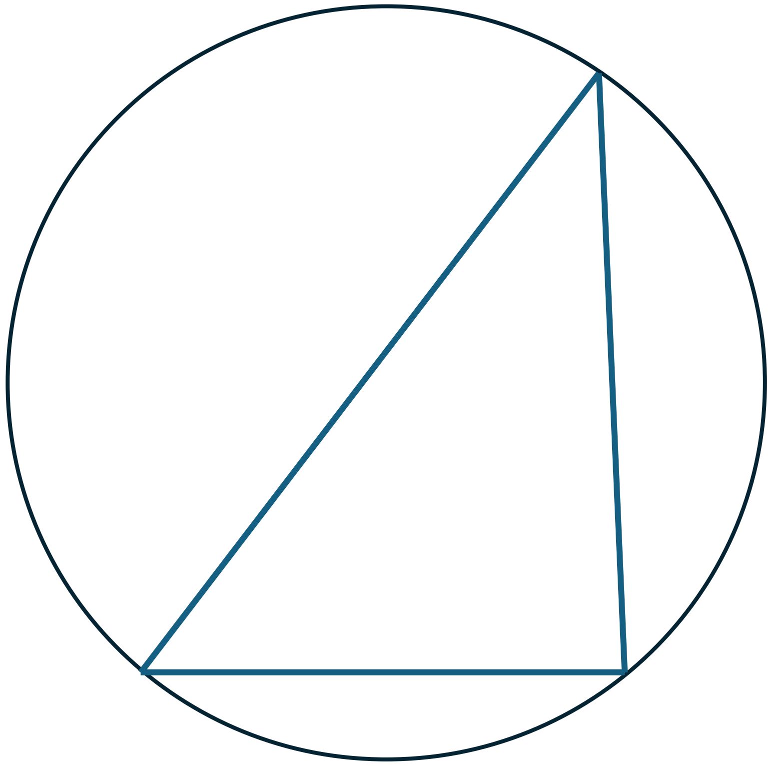
Jak długo trzeba poprawiać – może w nieskończoność???

Czy ten trójkąt ma największe pole?



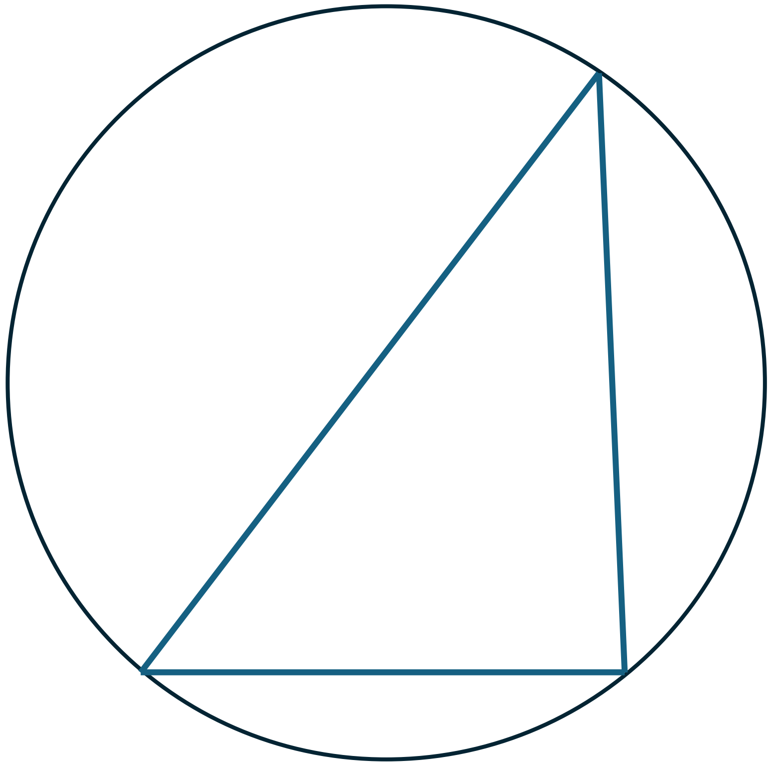
Jeśli dwa boki trójkąta są różnej długości, to można zwiększyć jego pole.

Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



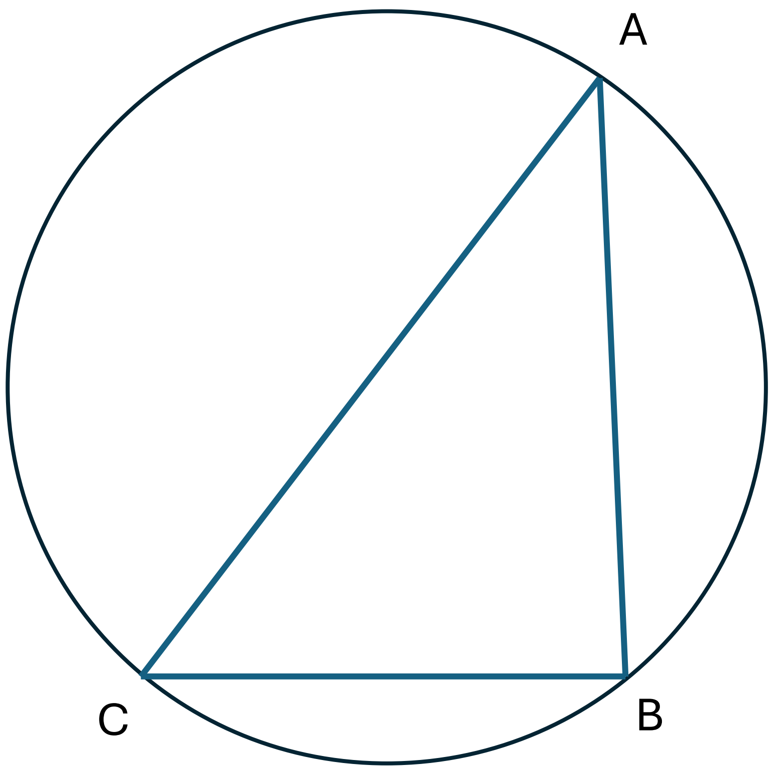
Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg.

Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



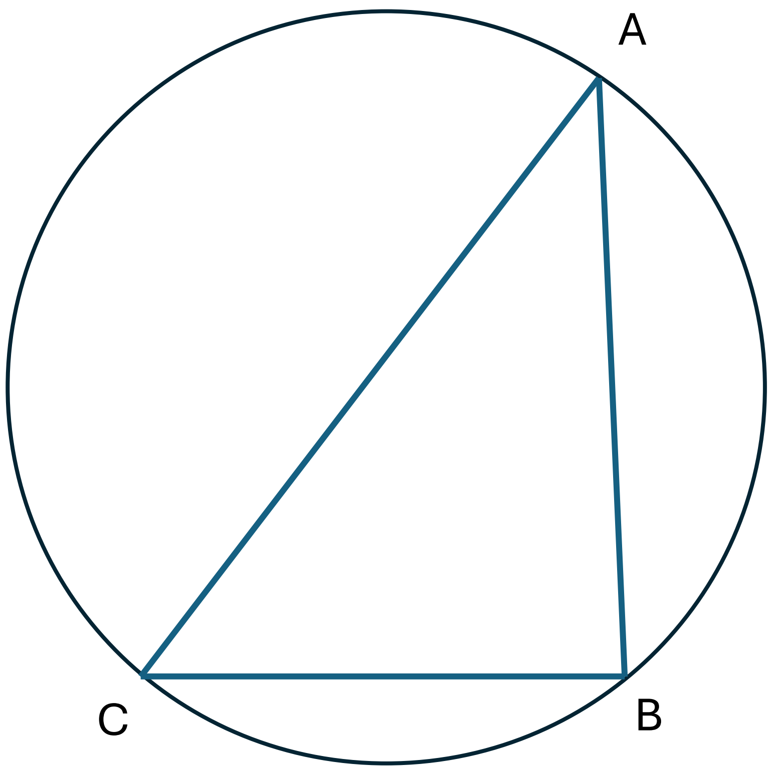
Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L.
Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3.

Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L. Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk AB był < L/3, a łuk AC > L/3.

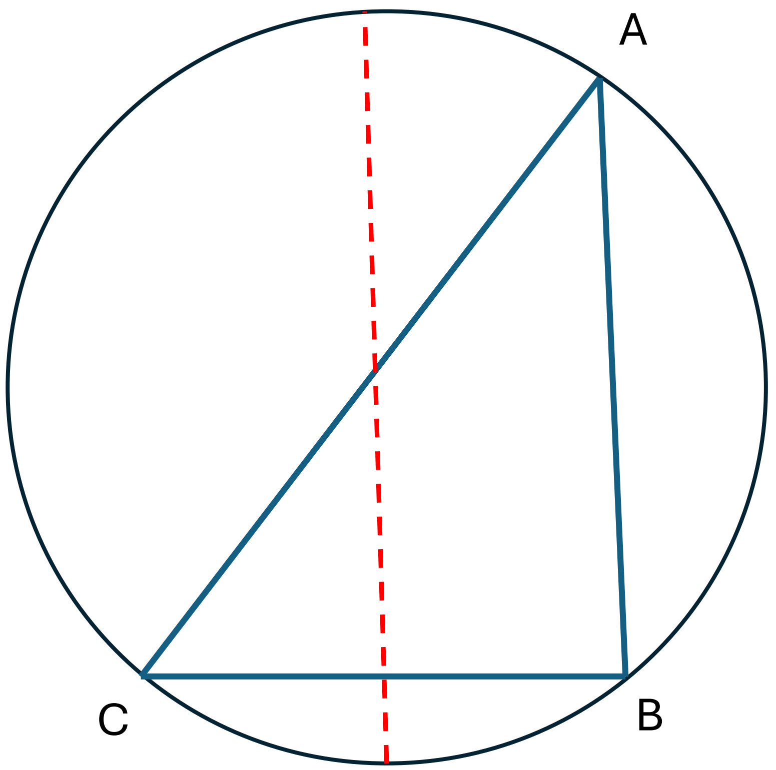
Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L. Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3.

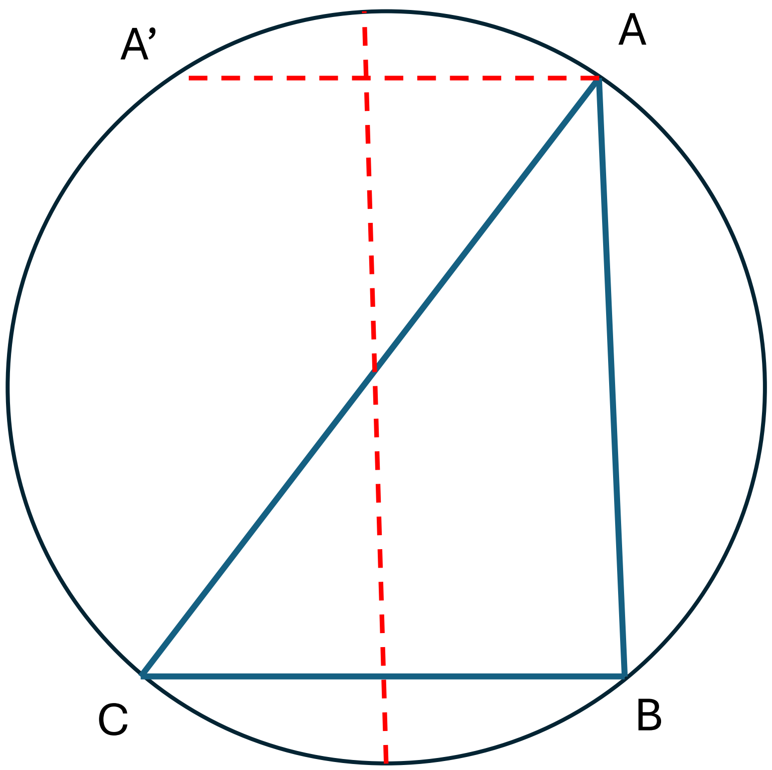
Narysujmy symetralną boku BC i odbijmy w niej punkt A.

Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



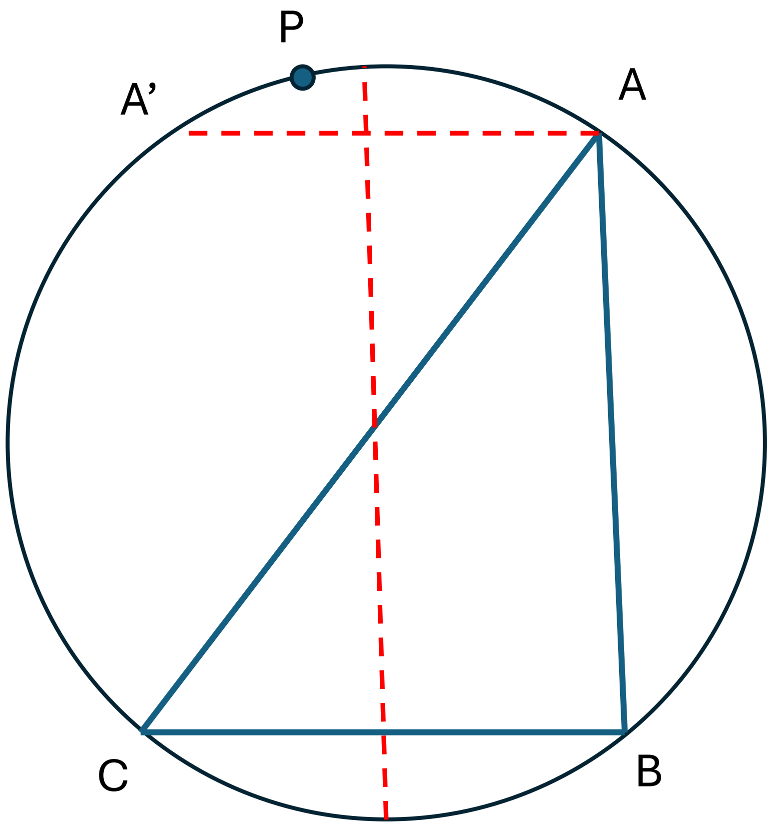
Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L. Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3. Narysujmy symetralną boku BC i odbijmy w niej punkt A.

Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L. Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3. Narysujmy symetralną boku BC i odbijmy w niej punkt A.

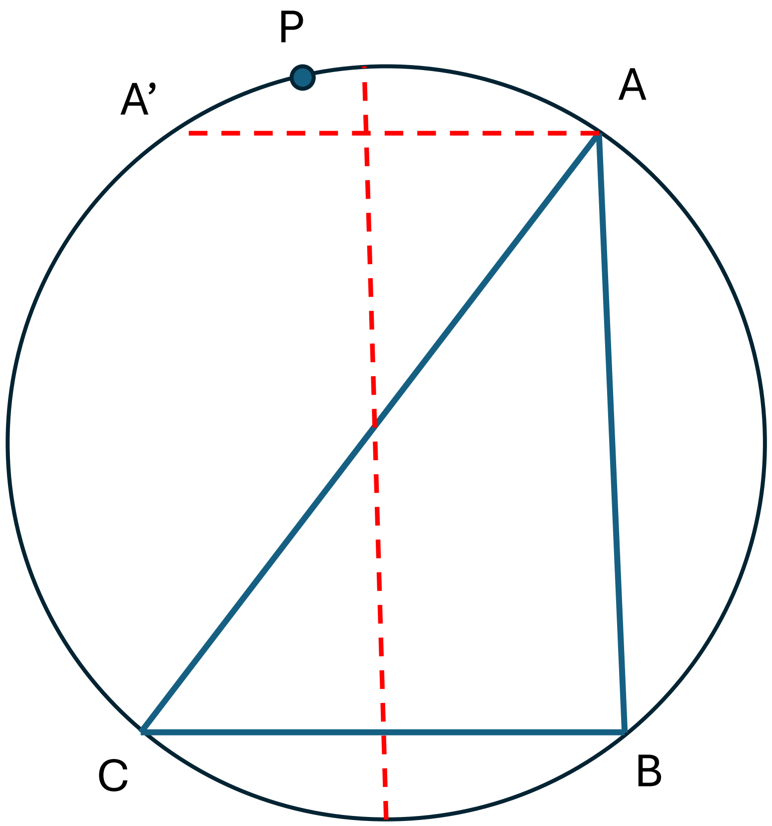
Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L. Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3. Narysujmy symetralną boku BC i odbijmy w niej punkt A.

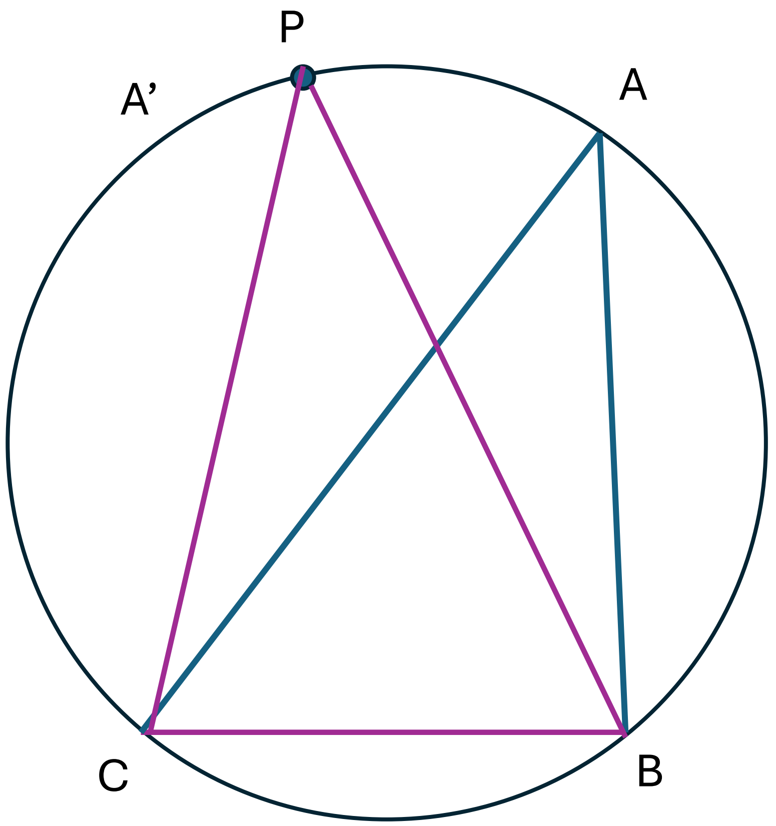
Przesunięcie A do dowolnego punktu P łuku AA' zwiększy pole naszego trójkąta.

Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



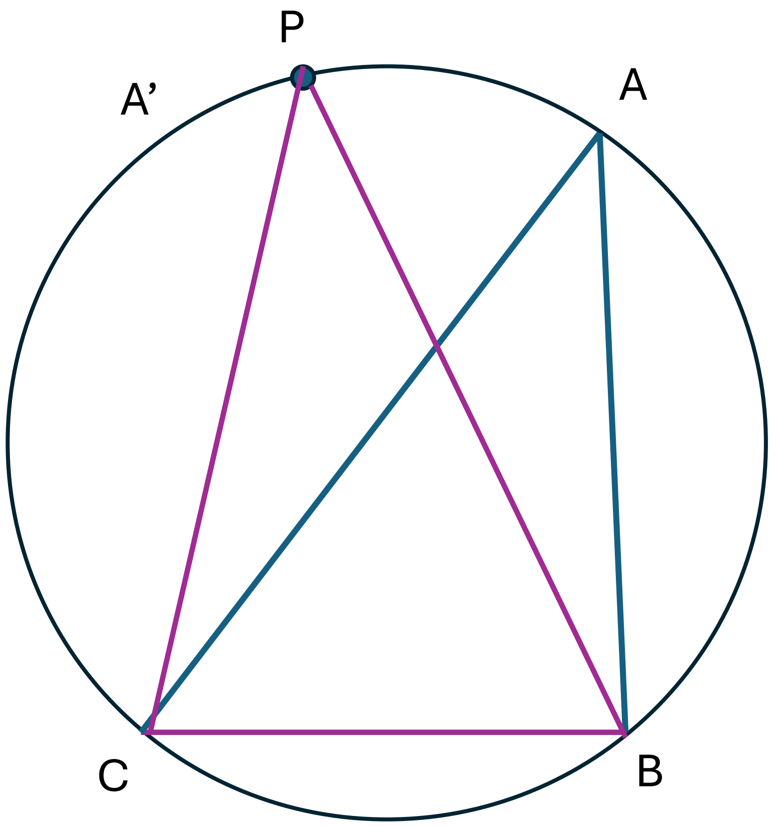
Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L.
Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3.
Narysujmy symetralną boku BC i odbijmy w niej punkt A.
Przesunięcie A do dowolnego punktu P łuku AA' zwiększy pole naszego trójkąta.
Ponieważ AC>L/3>A'C, to można wybrać P tak, by PC=L/3.

Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



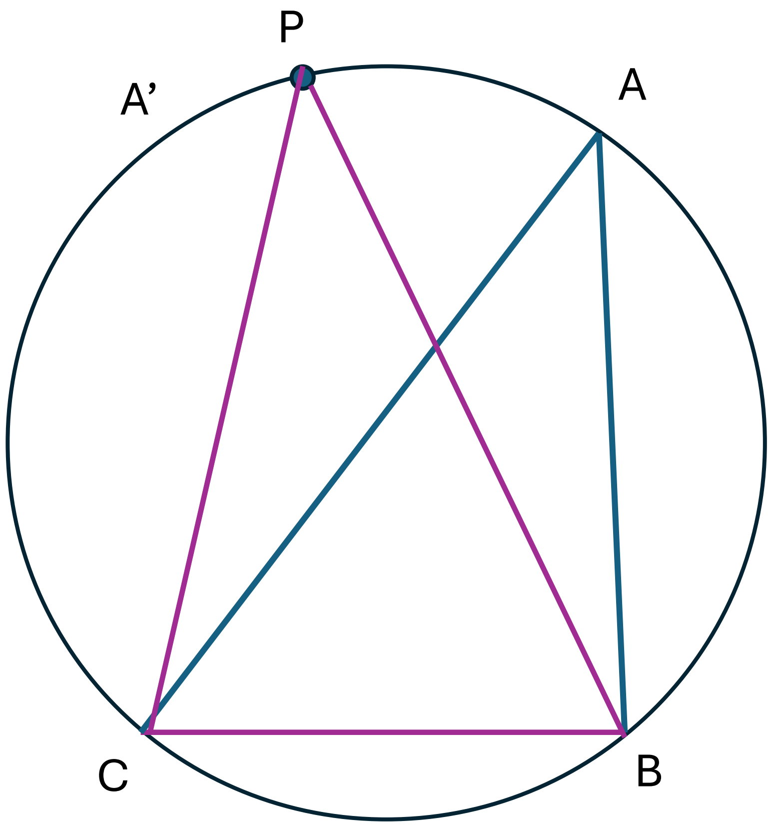
Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L.
Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3.
Narysujmy symetralną boku BC i odbijmy w niej punkt A.
Przesunięcie A do dowolnego punktu P łuku AA' zwiększy pole naszego trójkąta.
Ponieważ AC>L/3>A'C, to można wybrać P tak, by PC=L/3.
Fioletowy trójkąt ma większe pole i jeden bok taki, jak trójkąt równoboczny.

Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



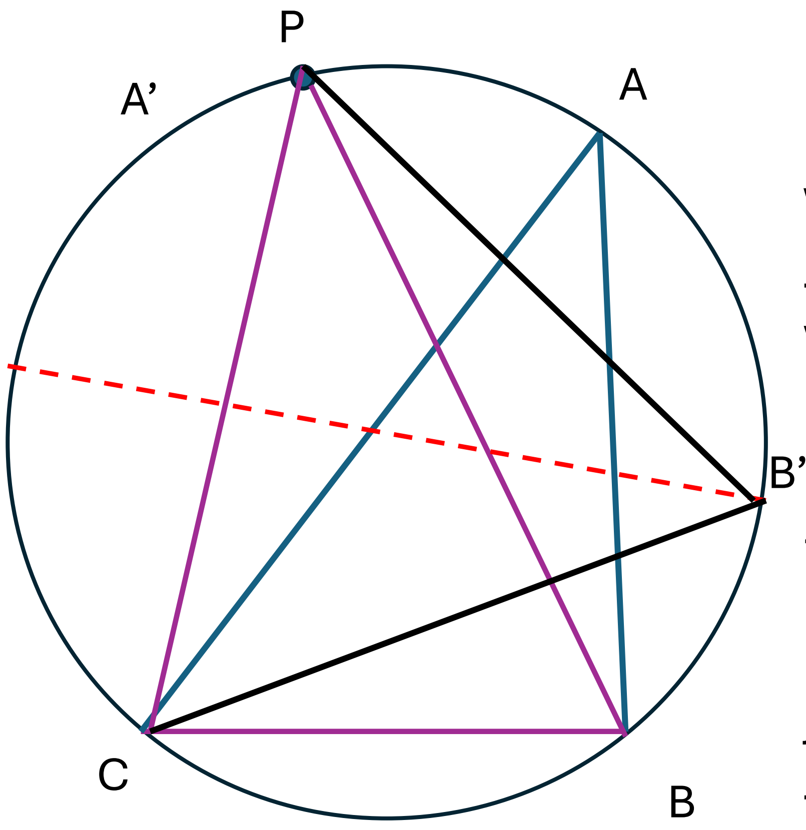
Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L.
Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3.
Narysujmy symetralną boku BC i odbijmy w niej punkt A.
Przesunięcie A do dowolnego punktu P łuku AA’ zwiększy pole naszego trójkąta.
Ponieważ AC>L/3>A’C, to można wybrać P tak, by PC=L/3.
Fioletowy trójkąt ma większe pole i jeden bok taki, jak trójkąt równoboczny.
Jeśli BC=L/3, to fioletowy trójkąt jest równoboczny – koniec.

Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L.
Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3.
Narysujmy symetralną boku BC i odbijmy w niej punkt A.
Przesunięcie A do dowolnego punktu P łuku AA' zwiększy pole naszego trójkąta.
Ponieważ AC>L/3>A'C, to można wybrać P tak, by PC=L/3.
Fioletowy trójkąt ma większe pole i jeden bok taki, jak trójkąt równoboczny.
Jeśli BC=L/3, to fioletowy trójkąt jest równoboczny – koniec.
Jeśli nie, przesuwamy punkt B do B' tak, by CB'=PB', uzyskując trójkąt równoboczny o większym polu.

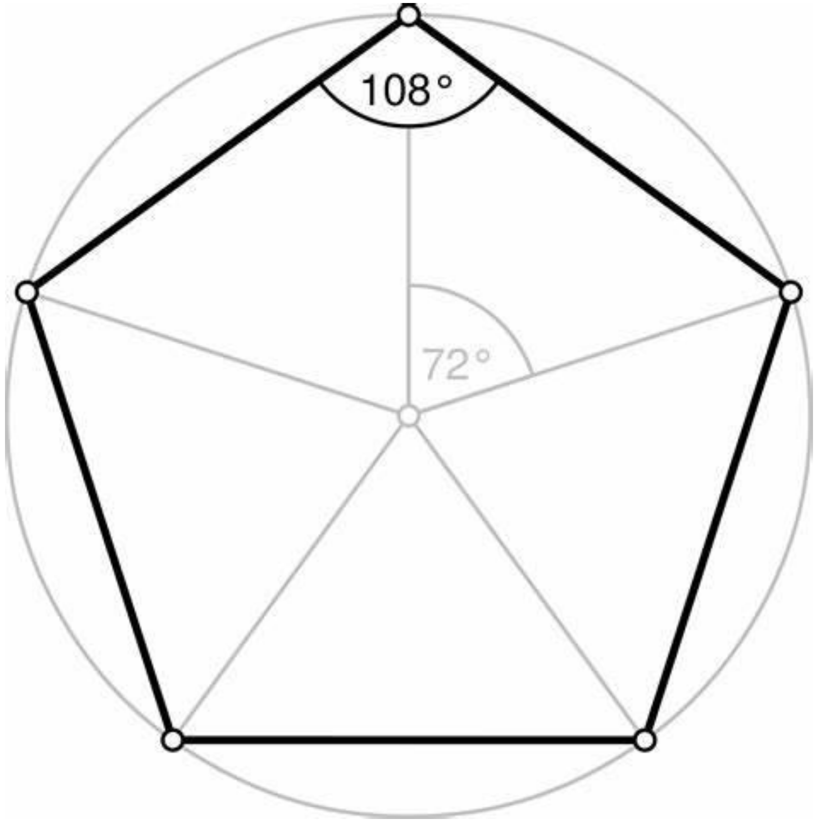
Trójkąt równoboczny ma pole większe od każdego innego trójkąta wpisanego w dany okrąg.



Weźmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie L.
Jeśli on nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk BC był < L/3, a łuk AC > L/3.
Narysujmy symetralną boku BC i odbijmy w niej punkt A.
Przesunięcie A do dowolnego punktu P łuku AA' zwiększy pole naszego trójkąta.
Ponieważ AC>L/3>A'C, to można wybrać P tak, by PC=L/3.
Fioletowy trójkąt ma większe pole i jeden bok taki, jak trójkąt równoboczny.
Jeśli BC=L/3, to fioletowy trójkąt jest równoboczny – koniec.
Jeśli nie, przesuwamy punkt B do B' tak, by CB'=PB', uzyskując trójkąt równoboczny o większym polu.

Zadanie do domu:

Wykazać tą samą metodą, że pośród wszystkich n-kątów wpisanych w dany okrąg największe pole ma wielokąt foremny, to jest taki, że wszystkie jego boki są tej samej długości.

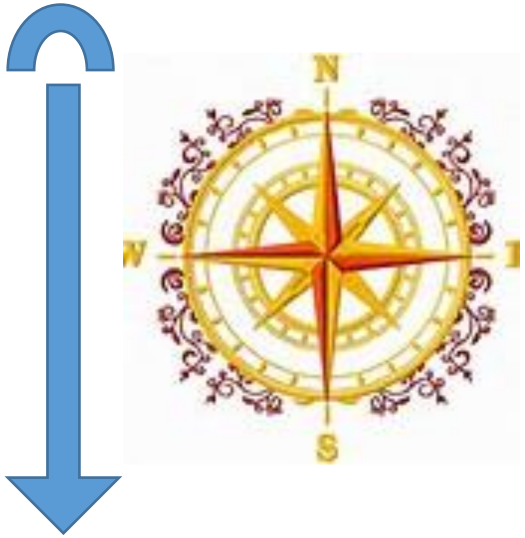


Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?

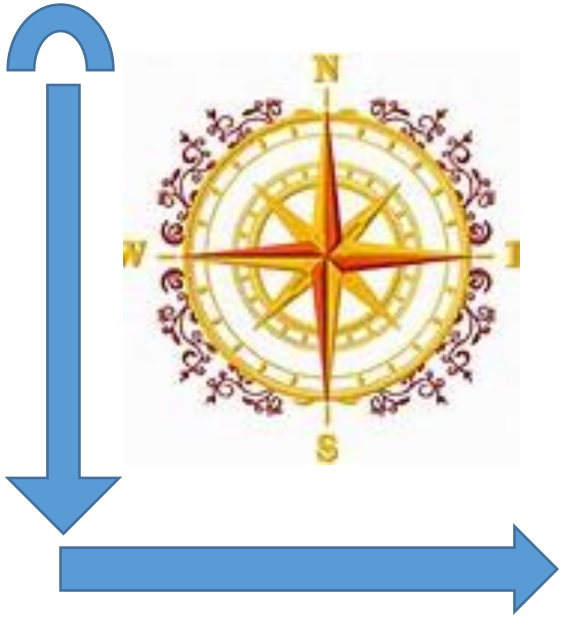
Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?



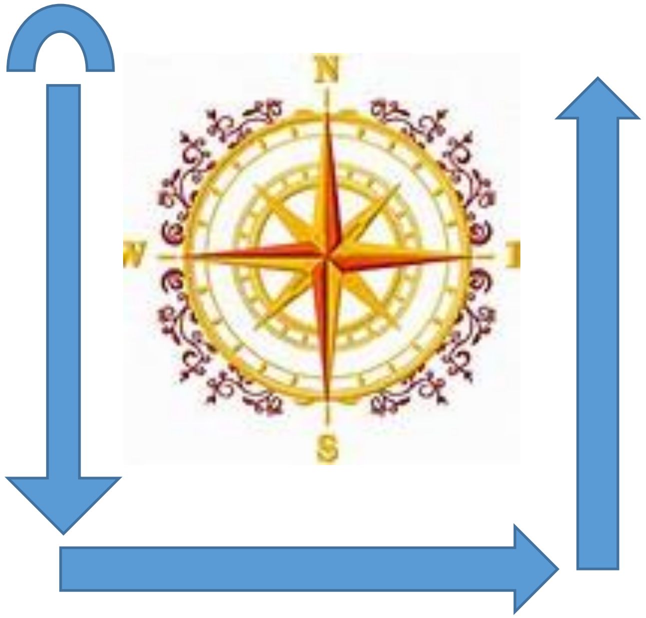
Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?



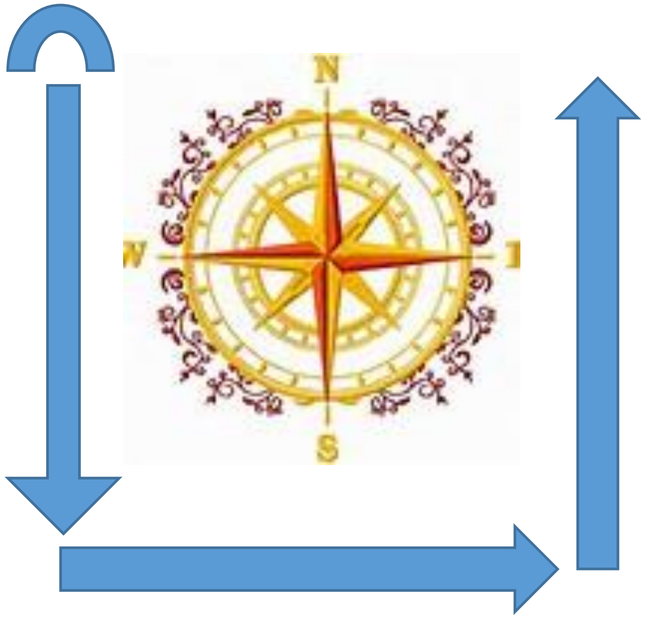
Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?



Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?



Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?

Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?

Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?

Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?

Niedźwiedź polarny wyszedł ze swojej nory; w poszukiwaniu żywności poszedł 1 km na południe, potem skręcił i poszedł 1 km na wschód, a następnie poszedł 1 km na północ.
Na końcu wędrówki znalazł się… przy wejściu do swojej nory.

Jak to możliwe? Gdzie znajdowała się nora niedźwiedzia?

Wielka, większa i największa

Wielka przygoda – udział w Memoriale
Większa przygoda – studia matematyczne
Największa przygoda – rozwiązanie problemu matematycznego, którego nikt przed Tobą nie zdołał pokonać

Dziękuję!