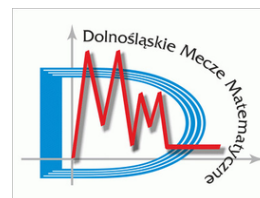


1. Wynajem autokaru na szkolną wycieczkę to droga sprawa. Z pewnej szkoły na wycieczkę wybiera się 350 dzieci, z każdą grupą dzieci musi jechać czworo opiekunów. Ile autokarów należy zamówić, żeby koszt wycieczki był jak najniższy, jeżeli w każdym autokarze jest 48 miejsc nie wliczając kierowcy?
2. W wierzchołkach pięciokąta umieszczamy liczby od 1 do 5 tak, by liczby w sąsiednich polach różniły się o więcej niż 1. Jaka może być suma liczb w wierzchołkach sąsiadujących z „5”?
3. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają równanie: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Udowodnij, że suma $a + b + c + d$ jest parzysta.
4. Mamy 5 kawałków papieru. W każdym ruchu możemy wybrać sobie kartkę i przerwać na 4 części. Czy po pewnym czasie możemy otrzymać dokładnie 2025 kawałków papieru?
5. Trzy osoby napisały na tablicy po 100 różnych słów każda. Następnie każde słowo, które pojawiło się co najmniej 2 razy zostało wymazane. Po wymazaniu pierwszej osobie zostało 45 słów, drugiej 68, a trzeciej 54. Udowodnij, że przed wymazaniem było słowo napisane przez każdą z osób.
6. Na kwadratowym dywanie o boku długości 1 metra jest 15 dziur. Udowodnij, że da się z niego wyciąć koło bez dziur o promieniu 12,5 cm.
7. Trójkąt równoramienny ABC ma podstawę AB o długości 10 i pole 50. Na boku AB zbudowano prostokąt $ABDE$ w taki sposób, że prostokąt i trójkąt się nachodzą oraz $|BD| = 5$. Jakie jest pole części wspólnej dwóch figur?
8. Z Gorzowa i Katowic wyruszają w tym samym czasie, w przeciwnych kierunkach, dwaj rowerzyści – Tadeusz i Ryszard. Obaj jadą w stałym tempie, przy czym Tadeusz jest trzy razy szybszy od Ryszarda. Minęli się po godzinie od wyruszenia. Ile łącznie zajmie podróż Ryszardowi?
9. Dominika narysowała na płaszczyźnie cztery punkty $ABCD$. Zmierzyła odległości między niektórymi z nich i otrzymała następujące wyniki: $|AB| = 13$, $|AD| = 32$, $|BD| = 19$, $|BC| = 40$, $|CD| = 21$. Ile wynosi odległość $|AC|$?
10. W wyborach na przewodniczącego szkoły startowało pięcioro kandydatów i tylko jeden z nich wygrał. Średnia liczba głosów oddanych na kandydata wynosi 32. Jeśli nie uwzględnimy zwycięzcy, średnia ta spada o 4. Ile głosów otrzymał zwycięzca?



1. Niech k oznacza liczbę autokarów, które zamówimy. Wówczas na wycieczkę pojedzie 350 dzieci i $4k$ nauczycieli. Muszą się oni zmieścić na $48k$ miejscach. Szukamy zatem najmniejszego takiego k , ażeby $350 + 4k \leq 48k$. Po odjęciu $4k$ stronami, mamy $350 \leq 44k$, jak łatwo bez wielu mnożeń sprawdzić, że $k = 10$, to za dużo, odjąć dwa razy 44 i otrzymujemy, że dla $k = 8$ mamy $350 \leq 352$ i lepiej nie będzie. Najmniej autokarów jak możemy wynająć, to właśnie 8.
2. Liczba 3 nie może sąsiadować ani z 2, ani z 4, zatem leży pomiędzy 1, a 5. Wobec tego 5 musi sąsiadować z 3. Ponieważ drugim sąsiadem 3 jest 1, to 1 nie może sąsiadować z 5. Ponieważ 4 nie może leżeć obok 5, to drugim sąsiadem 5 jest 2. Suma pól może być tylko jedna i wynosi $2 + 3 = 5$.
3. Suma $a + b + c + d$ jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy żadna, dwie lub wszystkie spośród liczb a, b, c, d są parzyste. Załóżmy zatem nie wprost, że nieparzystych jest jedna lub trzy. Zauważmy, że kwadrat liczby jest parzysty wtedy i tylko wtedy, gdy sama liczba jest parzysta. Gdyby była tylko jedna liczba nieparzysta, bez straty ogólności a , to lewa strona równości byłaby nieparzysta, a prawa parzysta, więc równość by nie zachodziła. Co gdyby były trzy liczby nieparzyste? Byłaby jedna jedyna parzysta, bez straty ogólności a , i wówczas ponownie lewa strona byłaby nieparzysta, a prawa parzysta. Sprzeczność.
4. W każdym ruchu zwiększamy liczbę kawałków papieru o 3, zatem reszta z dzielenia ilości naszych kawałków przez 3 się nie zmienia. Początkowo reszta wynosi 2, a reszta z dzielenia 2025 przez 3 wynosi 0. Zatem nie da się tak zrobić.
5. Gdyby każde wymazane słowo wystąpiło dokładnie 2 razy, to liczba wszystkich wymazanych słów byłaby dwukrotnie większa od liczby różnych wymazanych słów. Wymazane zostało $(100 - 45) + (100 - 68) + (100 - 54) = 133$ słów. Ta liczba jest nieparzysta, zatem przed wymazaniem musiało istnieć słowo, które wystąpiło 3 razy.
6. Podzielmy siatką 4×4 dywan na 16 kwadratów o bokach 25 cm. Dziur jest 15 zatem conajmniej jeden z małych kwadratów nie będzie miał dziury, możemy wyciąć z niego koło o promieniu 12.5 cm.
7. Z pola trójkąta obliczamy, że jego wysokość ma długość 10, więc bok BD ma długość połowy wysokości. Niech F i G oznaczają punkty przecięcia boku DE prostokąta z odcinkami AC i BC , a H niech będzie punktem przecięcia wysokości trójkąta z bokiem DE . Wtedy trójkąt CHF jest identyczny (przystający) do trójkąta AEF , tak samo jak trójkąt CHG jest identyczny z BDG . To oznacza, że pole części wspólnej to $3/4$ pola prostokąta, czyli

$$\frac{3}{4} \cdot 50 = 37,5.$$

8. Ponieważ obaj jechali tyle samo czasu i Tadeusz jest trzy razy szybszy, to pokonał do momentu spotkania on trzy razy dłuższą drogę niż Ryszard. To oznacza, że w momencie spotkania Ryszard pokonał $1/4$ drogi, zostało mu więc $3/4$ drogi, czyli trzy razy więcej niż do momentu spotkania przejechał. Zatem Ryszard będzie łącznie jechał cztery godziny.
9. Zauważmy, że

$$|AB| + |BD| = |AD|$$

oraz

$$|BD| + |CD| = |BD|.$$

Oznacza to, że punkty A, B, D leżą w tej kolejności na prostej. Tak samo punkty B, D, C leżą w tej kolejności na jednej prostej. Zatem na jednej prostej leżą w kolejności punkty A, B, D, C i mamy

$$|AC| = |AD| + |DC| = 53.$$

10. Skoro średnia wszystkich kandydatów to 32, to łącznie oddano

$$5 \cdot 32 = 160$$

głosów. Podobnie na tych czterech kandydatów, którzy nie zwyciężyli, oddano razem

$$4 \cdot (32 - 4) = 112$$

głosów. Na zwycięzcę oddano zatem $160 - 112 = 48$ głosów.