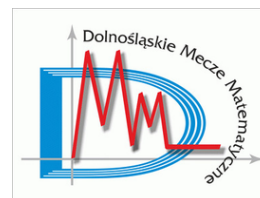


1. Dany jest okrąg o środku w punkcie S i punkt D , leżący na okręgu. Promień SD przecięto cięciwą AB , w punkcie C różnym od S . Dowiedz, że $|AB| > 2|CD|$.
2. Czy kwadrat 10×10 da się pokryć tetraminami w kształcie litery „T”, składającymi się z czterech pól 1×1 ?
3. Udowodnij, że parzystokąt wypukły posiada przekątną, która nie jest równoległa do żadnego z boków
4. Na kwadracie $ABCD$ opisano okrąg, a na nim wybrano punkt P . Pokaż, że wartość wyrażenia $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ nie zależy od wyboru punktu P .
5. Udowodnij, że spośród liczb od 1 do 15 nie można wybrać dwóch liczb, których iloczyn jest równy sumie pozostałych trzynastu.
6. Do pewnej dodatniej liczby naturalnej N dopisano po prawej 3 cyfry. Otrzymana liczba jest równa sumie wszystkich liczb naturalnych od 1 do N . Znajdź N .
7. W każde pole tabelki 10×10 wpisano liczbę naturalną. W każdym wierszu podkreślono jedną z liczb o największej wartości w tym wierszu, a w każdej kolumnie jedną z liczb o najmniejszej wartości w tej kolumnie. Okazało się, że wszystkie podkreślone liczby zostały podkreślone dwa razy. Udowodnij, że wszystkie liczby w tabeli są równe.
8. Punkty K i L są środkami boków BC i DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnij, że $|KL| \leq \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$.
9. Hania pomyślała sobie liczbę dwucyfrową. Powiedziała Antkowi, że jej liczba pomnożona przez 4 ma cyfrę dziesiątek równą 7, a jeśli pomnożyć jej liczbę przez 3, to cyfrą jednośc będzie także 7. Jaką liczbę pomyślała sobie Hania? Podaj wszystkie możliwości.
10. Oblicz sumę wszystkich liczb sześciocyfrowych, które zawierają każdą z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 dokładnie raz.



1. Z nierówności trójkąta dla $\triangle ACS$:

$$|AC| + |CS| > |AS| = |DS| = |CD| + |CS|$$

$$|AC| > |CD|$$

Ponownie stosując nierówność trójkąta dla $\triangle BCS$, otrzymujemy analogicznie $|BC| > |CD|$. Dodając stronami nierówności:

$$|AC| + |BC| > 2|CD|$$

Ponieważ punkty A, B, C są współliniowe, to $|AC| + |BC| = |AB|$. Więc $|AB| > 2|CD|$, co należało wykazać.

2. Otóż nie. Pokolorujmy pola kwadratu w szachownicę. Będzie na niej wówczas 50 pól białych i 50 pól czarnych. Każde tetramino zajmie albo trzy pola białe i jedno czarne, albo na odwrót. Ponieważ pól jest 100, a pojedyncze tetramino zajmuje ich 4, to musimy użyć 25 płytek. Pewna ich liczba będzie pierwszego typu (tzn. będzie zajmowała każda 3 pola białe i 1 pole czarne), oznaczmy tę liczbę przez k . $25 - k$ płytek będzie z kolei zajmowało każda 1 pole białe i 3 czarne. Ile pól białych zajmą nasze płytki: $k \cdot 3 + (25 - k) \cdot 1 = 25 + 2k$. Jednakże pól białych musi być 50, a nie istnieje taka liczba naturalna k , by $25 + 2k = 50$.

3. Jest $2n$ boków, a przekątnych jest $\frac{1}{2}2n(2n - 3) = n(2n - 3)$. Pojedynczy bok może być równoległy do co najwyżej $n - 2$ przekątnych (Jest $2n - 4$ pozostałych wierzchołków, każdy wyznacza wcale lub jedną równoległą przekątną, policzymy je dwa razy). Z zasady szufladkowej Dirichleta, skoro mamy $2n$ boków, a $n(2n - 3)$ przekątne, to gdyby każda przekątna była równoległa do pewnego boku, to pewnemu bokowi przypiszemy $\lceil \frac{n(2n-3)}{2n} \rceil = \lceil n - \frac{3}{2} \rceil = n - 1$ przekątnych. Sprzeczność.

4. Niech b oznacza długość boku kwadratu. Dorysujmy przekątne kwadratu. Są one średnicami tego okręgu, a zatem trójkąty $\triangle ACP$ i $\triangle BDP$ są prostokątne. Z twierdzenia Pitagorasa, zastosowanego do obu z nich:

$$|PA|^2 + |PC|^2 = 2b^2$$

$$|PB|^2 + |PD|^2 = 2b^2$$

Po dodaniu równań stronami otrzymujemy

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4b^2$$

Ponieważ bok kwadratu jest ustalony, to wartość wyrażenia istotnie nie zależy od wyboru punktu P .

5. Załóżmy nie wprost, że taki wybór $x < y$ jest możliwy. Teraz $xy = 120 - x - y$ co po przekształceniu daje nam $(x + 1)(y + 1) = 121$. Otrzymujemy zatem, że $x + 1 = 1$, $y + 1 = 121$ albo $x + 1 = 11$, $y + 1 = 11$. W obu przypadkach dochodzimy do sprzeczności.
6. Niech dopisane cyfry tworzą liczbę M , $0 \leq M \leq 999$. Wówczas otrzymana liczba jest równa z jednej strony $1000N + M$, a z drugiej $1 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$. Po przekształceniu otrzymujemy, że $N(N - 1999) = 2M$. Ponieważ $0 \leq M \leq 999$ wiemy, że $0 \leq N(N - 1999) \leq 1998$. Jeżeli $N < 1999$ to $N(N - 1999) < 0$, a jeżeli $N \geq 2000$ to $N(N - 1999) > 1998$. Zatem $N = 1999$.

7. Wszystkie podkreślone liczby są sobie równe. Załóżmy, że tak nie jest. Niech $a < b$ będą dwoma różnymi podkreślonymi liczbami. Weźmy c leżące w tym samym wierszu co a i tej samej kolumnie co b wiemy, że $a \geq c$ oraz $c \geq b$, więc $a \geq b$. Sprzeczność. Teraz niech n będzie dowolną liczbą w tabeli. n jest $\leq$ od podkreślonej liczby w swoim wierszu, oraz jest $\geq$ od podkreślonej liczby w swojej kolumnie. Ale wszystkie podkreślone liczby są sobie równe, zatem n też.
8. Niech M będzie środkiem przekątnej AC . Teraz $|KM| = \frac{1}{2}|AB|$ oraz $|LM| = \frac{1}{2}|CD|$. Korzystając z nierówności trójkąta dla trójkąta KLM otrzymujemy: $|KL| \leq |KM| + |LM| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$.
9. Skoro po pomnożeniu przez 3 cyfra jedności wyniku to 7, to cyfrą jedności liczby Hani musi być 9. Oznacza to, że przy pomnożeniu przez 4 wystąpi przezniesienie 3 z cyfry jedności do cyfry dziesiątek. Stąd cyfra jedności pomnożona przez 4 daje wynik, którego cyfrą jedności jest $7 - 3 = 4$. Zatem cyfra dziesiątek liczby Hani to 1 lub 6, więc liczba Hani to 19 lub 69.
10. Wśród liczb z zadania, jest $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ takich, gdzie 1 stoi na konkretnej pozycji, np. cyfry jedności, dziesiątek etc. Zatem jeśli obliczymy sumę wszystkich tych liczb, to *wkład* cyfr 1 wyniesie
- $$5! \cdot 1 + 5! \cdot 10 \cdot 1 + 5! \cdot 10^2 \cdot 1 + \dots = 5! \cdot 10^5 \cdot 1 = 5! \cdot 1 \cdot (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000) = 1 \cdot 5! \cdot 111111.$$

Rozumując analogicznie, *wkład* wszystkich cyfr 2 wyniesie

$$2 \cdot 5! \cdot 111111.$$

Sumę liczb z treści zadania obliczamy jako sumę wkładów poszczególnych cyfr, czyli

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 5! \cdot 111111 = 21 \cdot 120 \cdot 111111 = 279999720.$$

