DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA
MECZ I

1) Jak obliczyć sprytnie bez kalkulatora wynik działania $2015^2 - 2016 \cdot 2014$?

2) Jakie powinny być długości a, b i c boków trójkąta, aby zachodził warunek $a/(b+c) + b/(c+a) + c/(a+b) = 1$?

3) Dwa okręgi o promieniu 1 są styczne zewnętrznie. Prosta k jest ich wspólną styczną. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do obu danych okręgów i do prostej k.

4) Znajdź takie liczby $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2015}$, które spełniają następujące warunki: $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{2015}| = 1$ oraz $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{2014}x_{2015} + x_{2015}x_1 = 0$.

5) Kiedy Louis kupił swój pierwszy sportowy samochód i zatankował do pełna, za 50 litrów paliwa zapłacił 40 euro. Kiedy po kilku latach kupił samochód rodzinny i zatankował do pełna, za 40 litrów paliwa zapłacił 50 euro. O ile procent podrożało paliwo w tym czasie?

6) Jacek i Wacek grają w statki na planszy 9×9. Jacek ukrył na niej lotniskowiec o wymiarach 1×5 lub 5×1. Ile co najmniej strzałów musi oddać Wacek, aby na pewno trafić w ten lotniskowiec?

7) Para (a, b) spełnia poniższy układ równań. Oblicz sumę liczb a i b.
$2015x+2016y = 16126$
$0{,}125x + {}^1/_8\, y = 1$.

8) Dla liczby całkowitej a określamy operację a^*, która zastosowana do liczby nieparzystej daje w wyniku $a+3$, a zastosowana do liczby parzystej daje w wyniku ${}^a/_2$. Wyznacz wszystkie liczby całkowite, dla których spełniona jest równość $((a^*)^*)^* = 505$.

9) Czy koło o promieniu 2 można pokryć czterema kołami o promieniu 1?

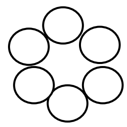
10) Czy 12-kąt foremny można podzielić na wielokąty foremne?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16

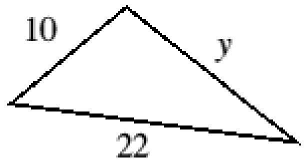
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1) Dwa koła są styczne wewnętrznie i jedno przechodzi przez środek drugiego. Ile procent jednego koła wystaje poza drugie?



2) Na ile sposobów można rozmieścić liczby od 5 do 10 w kołach diagramu, aby liczby w stycznych kołach dawały w sumie liczby pierwsze?

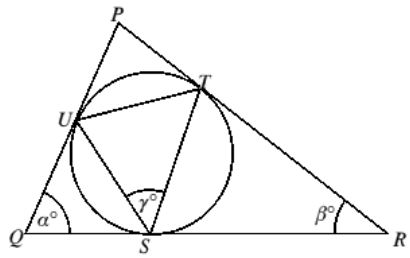


3) Trójkąt z rysunku ma pole 88. Jak długi jest jego trzeci bok?

4) Liczba całkowita n zawiera się miedzy 1 i 20. Jacek wysumował liczby od 1 do n włącznie, a Wacek od n+1 do 20 włącznie. Otrzymali jednakowe wyniki. Ile wynosi n?

5) Walet Kier mówi prawdę zawsze w poniedziałki, wtorki, środy i czwartki, a pozostałe dni tygodnia kłamie. Walet Karo mówi prawdę w piątki, soboty, niedziele i poniedziałki, a w pozostałe dni kłamie. W zeszłym tygodniu obaj powiedzieli równocześnie: Wczoraj kłamałem. W jakim dniu tygodnia miało to miejsce?

6) Flufy są czerwone albo niebieskie i mają 2, 3 albo 4 głowy. Flufy, z których każdy reprezentował inną z możliwych form, ustawiono w szereg w taki sposób, że sąsiedzi zawsze różnili się kolorem i liczbą głów. Na ile sposobów można flufy ustawić w szereg od lewej do prawej?



7) W trójkąt PQR wpisano okrąg styczny do boków w punktach S, T, U jak na rysunku. Wykaż, że γ jest średnią α i β.

8) Znajdź takie liczby $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2014}$, które spełniają następujące warunki: $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{2014}| = 1$ oraz $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{2013}x_{2014} + x_{2014}x_1 = 0$.

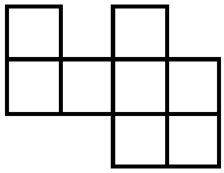
9) Wyznaczyć pary (x, y) spełniające równanie $x^2+y^2 = x+y+8$.

10) Czy koło o promieniu 2 można pokryć dziewięcioma kołami o promieniu 1?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III



1) Na rysunku należy zacieniować 6 kwadratów tak, aby utworzyły siatkę sześcianu. Na ile sposobów można to zrobić?

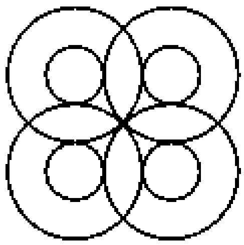
2) Ramona ma duże pudło sześciennych klocków o krawędziach długości 4, 6 lub 10 cm. Buduje wieże z trzech klocków. Ile różnej wysokości wież może zbudować?

3) Piotruś Pan ma karty z wydrukowanymi na nich liczbami od 1 do 25. Chce z nich ułożyć jak najdłuższy ciąg w taki sposób, aby każde dwie sąsiednie karty miały wspólny dzielnik będący liczbą pierwszą. Jaki najdłuższy ciąg może ułożyć Piotruś Pan?

4) Jaka jest największa liczba, której kwadrat jest dzielnikiem 10!?

5) Z czerech różnych cyfr tworzymy wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach, a następnie wszystkie utworzone liczby dodajemy. Jaka jest największa liczba pierwsza, która dzieli tę sumę?

6) Szklane wazony mają kształt walca. Większy ma średnicę 20 cm, a mniejszy średnicę 10 cm i wysokość 16 cm. Większy wazon jest częściowo wypełniony wodą. Mniejszy wazon, początkowo pusty, wstawiamy do większego i zaczyna się doń wlewać woda. Kiedy mniejszy walec stoi już na dnie większego, jest napełniony do połowy. Jaka była na początku wysokość słupa wody w większym wazonie?



7) Do spokojnego stawu wrzucono jednocześnie cztery jednakowe kamienie w wierzchołkach kwadratu. Po pewnym czasie rozchodzące się kręgi na wodzie utworzyły figurę z rysunku (każdy większy krąg jest styczny do jednego większego i dwóch mniejszych). Większy krąg ma promień 1. Jaki promień ma mniejszy?

8) Niech $f(x) = x + \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2+1}}$? Ile wynosi $f(2015)$?

9) Kwadratowy kawałek bibuły o boku długości 1 cm nasączono atramentem, a następnie umieszczono na środku białej kartki papieru. Kawałek bibuły obrócono o 180° wokół jednego z wierzchołków tak, że całą powierzchnią dotykał stale papieru. Na koniec bibułę usunięto. Jak duże pole na kartce zostało zamazane atramentem?

10) Pewna funkcja zdefiniowana na dodatnich liczbach całkowitych ma następującą własność dla wszystkich x i y: $f(xy) = f(x) + f(y)$. Wiadomo ponadto, że $f(10) = 14$ i $f(40) = 20$. Ile wynosi $f(500)$?