DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1) W ciągu ostatniego tygodnia masa małej foczki wzrosła o 4%, a słoniątka o 4 kg. Skutkiem tego średnia masa obu zwierząt wzrosła o 3 kg, czyli o 2%. Jaką masę ma obecnie słoniątko?

2) Sylwia przygotowuje się do sprawdzianu z matematyki. Naukę rozpoczęła kilka minut po 17:00, a zakończyła przed 18:00. Gdy rozpoczynała i potem kończyła naukę, wskazówki zegara (minutowa i godzinowa) tworzyły kąt o mierze 110°. Ile minut poświęciła na naukę?

3) Ile trójek liczb całkowitych dodatnich m, n, k spełnia równanie $18^m \cdot 24^n = 12^k$?

4) Uczniów biorących udział w teście do Olimpiady Matematycznej Juniorów należało rozmieścić w salach po równo, tak by w każdej sali były nie więcej niż 32 osoby. Kiedy w salach usadzono po 22 osoby, dla jednego zawodnika zabrakło miejsca. Kiedy z jednej sali zrezygnowano, miejsc wystarczyło dla wszystkich. Ilu zawodników wzięło udział w teście i w ilu salach go pisali?

5) Tomek stoi na peronie o długości 340 m. Przejeżdżający obok niego pociąg towarowy mijał go 6s, a od momentu kiedy lokomotywa dotarła na początek peronu do momentu, gdy tylne światła ostatniego wagonu minęły jego koniec, upłynęły 23 s. Pociąg przez cały czas jechał ze stałą prędkością. Jaka to była prędkość i jak długi był pociąg?

6) Czy wierzchołki ośmiokąta foremnego można ponumerować liczbami od 1 do 8 tak, aby dla dowolnych trzech kolejnych wierzchołków suma numerów była większa od 13?

7) Zapis $n!$ [czytaj: en silnia] oznacza iloczyn liczb naturalnych od 1 do n. Iloma zerami kończy się zapis dziesiętny liczby 2017!?

8) Wykaż, że jeśli m jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{8m+5}$ jest niewymierna.

9) W trapezie prostokątnym o podstawach długości 3 i 4 przekątne są prostopadłe. Jakie jest pole i obwód tego trapezu?

10) Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x. Rozwiąż równanie $[x] + [-x] = 0$.

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy: f – początkowa masa foczki, s – początkowa masa słoniątka. Mamy układ równań $1{,}02\cdot(f+s)/2 = 3 + (f+s)/2 = (1{,}04f + s + 4)/2$, spełniony przez parę liczb $f = 50$, $s = 250$. Albo prościej: $f+s=300$, bo 2% połowy tej liczby to 3 i dalej $0{,}04f + 4 = 3\cdot 2$, więc $f=50$. Stąd otrzymujemy, że słoniątko waży obecnie $s + 4 = 254$ kg.

2. W ciągu m minut wskazówka minutowa pokonuje kąt $m\cdot(360°/60) = 6m$ stopni, a godzinowa kąt $m\cdot(360°/(60\cdot 12)) = 0{,}5m$ stopni. O 17:00 wskazówki tworzą kąt $5\cdot(360°/12) = 150°$. Niech m_1 to czas, jaki musi upłynąć, by wskazówki utworzyły kąt o mierze 110°. Wskazówka minutowa 'goni' wtedy godzinową, więc $150 - 6m_1 + 0{,}5m_1 = 110$. Stąd $m_1 = 80/11$. Niech m_2 oznacza czas, jak musi upłynąć, by wskazówki ponownie utworzyły kąt 110°. Stanie się to po przegonieniu wskazówki godzinowej przez minutową, a więc $150 - 6m_2 + 0.5m_2 = -110$. Stąd $m_2 = 520/11$. Czas poświęcony przez Sylwię na naukę to $m_2 - m_1 = 520/11 - 80/11 = 440/11 = 40$ minut.

3. Rozkładając 18, 24 i 12 na czynniki pierwsze, otrzymujemy równanie $2^m \cdot 3^{2m} \cdot 2^{3n} \cdot 3^n = 2^{2k} \cdot 3^k$, co na mocy jednoznacznego rozkładu na czynniki pierwsze jest równoważne układowi równań $m + 3n = 2k$, $2m + n = k$, ten z kolei jest równoważny układowi $3m = n$, $5m = k$. Po podstawieniu za m dowolnej liczby całkowitej dodatniej otrzymujemy trójkę liczb będących rozwiązaniem wyjściowego równania. Czyli takich trójek jest nieskończenie wiele. Za podanie zależności, która wynika z układu równań bez uzasadnienia (lub przynajmniej wysłowienia), że z niej wynika wyjściowy układ równań odejmujemy 2 pkt (bo mogłyby sie pojawić pierwiastki obce, nie spełniające wyjściowego równania).

4. Niech s oznacza liczbę początkowo użytych sal. Rezygnacja z jednej sali oznacza, że 23 osoby (22 z tej sali i jedna osoba, dla której zabrakło miejsca) muszą zostać rozlokowane po równo pomiędzy pozostałe s-1 sal. Stąd $(s-1) \mid 23$. Zatem $s-1 = 23$ lub $s-1 = 1$. Drugi przypadek odrzucamy, bo wtedy liczba uczestników po przeniesieniu ich do jednej sali byłaby zbyt duża (45>32). Stąd $s-1=23$ i jest to liczba sal, do których przeniesiono po 1 uczestniku. Zatem w konkursie brało udział $23\cdot(22+1) = 529$ osób.

5. Niech p to długość pociągu w metrach, v – jego prędkość w m/s. Otrzymujemy zależności $6v = p$ oraz $23v = 340 + p$. Rozwiązaniem jest $p = 120$ m, $v = 20$ m/s.

6. Mamy 8 kolejnych trójek numerów wierzchołków. Tworząc trójki, każdej z liczb używamy trzykrotnie, zatem suma wszystkich trójek wynosi $3 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 8) = 3 \cdot 36 = 108$. Suma każdej trójki ma wynosić co najmniej 14, więc suma wszystkich trójek powinna wynosić co najmniej $8 \cdot 14 = 112 > 108$, co daje sprzeczność. Za odpowiedź bez precyzyjnego uzasadnienia przyznajemy 2 punkty.

7. Zer na końcu liczby jest tyle, co dziesiątek w rozkładzie liczby na czynniki, a tych jest tyle, co piątek w rozkładzie na czynniki pierwsze (bo dwójek w tym rozkładzie jest więcej). Co piąta liczba dzieli się przez 5, co 25. ma w rozkładzie dwie piątki, co 125. – trzy piątki, a co 625. – cztery. Zatem zer na końcu liczby 2017! jest [2017:5] + [2017:25] + [2017:125] + [2017:625], gdzie kwadratowy nawias oznacza część całkowitą. To daje 403+80+16+3 = 502. Za poprawny wynik bez uzasadnienia przyznajemy 4 pkt, za wynik nie uwzględniający potęg piątki przyznajemy 2 pkt.

8. Liczba $\sqrt{n}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy n jest kwadratem (uzasadnienie wymagane: istnieją p, q wymierne takie, że $q^2n=p^2$, zatem każdy czynnik pierwszy n musi wystąpić w rozkładzie parzyście wiele razy). Gdyby liczba $\sqrt{8m+5}$ była wymierna, to $8m + 5$ jako liczba nieparzysta byłoby kwadratem liczby nieparzystej. Ale kwadraty liczb nieparzystych dają przy dzieleniu przez 8 resztę 1 (uzasadnienie za 4 pkt), a nie 5, zatem liczba ta jest niewymierna.

9. Trójkąty o przyprostokątnych 3 i h oraz h i 4 są podobne (cecha kkk), wiec z proporcjonalności boków mamy $3/h = h/4$ i $h=2\sqrt{3}$. Drugie ramię trapezu ma wiec długość $\sqrt{13}$. Obwód trapezu wynosi $7 + 2\sqrt{3} + \sqrt{13}$, a pole $7\sqrt{3}$.

10. Jeżeli $x\in$ Z, to $[x] + [-x] = x - x = 0$. Jeżeli $x \notin$ Z, to $x = k+a$, gzie $k\in$Z i $0<a<1$. Mamy wtedy $[x] = k$ i $[-x] = -k-1$. Zatem $[x]+[-x] = -1 \neq 0$. Równanie $[x] + [-x] = 0$ spełniają więc jedynie liczby całkowite. Za stwierdzenie (ze sprawdzeniem), że liczby całkowite są pierwiastkami, bez uzasadnienia, że inne liczby nie są, przyznajemy 4 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2017/18

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1. Po świętach babcia Rozalia wyniosła na strych ozdoby choinkowe. Bombki przechowuje w czterech małych pudełkach i jednym dużym. W dużym pudełku jest o 10% mniej bombek niż w małych pudełkach razem. Ile bombek ma babcia Rozalia, jeśli w sumie jest ich nie więcej niż 80, a w małych pudełkach jest ich w sumie więcej niż 30?

2. Uczniowie II a otrzymali z poprawy pracy klasowej oceny 2, 3, 4 i 5. Dwój, trój i piątek było tyle samo, a czwórek było więcej niż wszystkich pozostałych ocen. Więcej niż trójkę otrzymało mniej niż 10 uczniów. Ilu uczniów otrzymało trójkę, jeśli poprawę pisało nie mniej niż 12 osób?

3. Znajdź najmniejsze cztery kolejne liczby nieparzyste dodatnie, których suma dzieli się przez 15.

4. Ile jest liczb stucyfrowych?

5. Minister infrastruktury jechał pociągiem Super Express z Wrocławia do Warszawy. Podróż rozpoczął między 4:00 i 5:00, a zakończył między 7:00 i 8:00. Zauważył, że położenie wskazówek minutowej i godzinowej w chwili wyjazdu z Wrocławia i przyjazdu do Warszawy było takie samo, wskazówki zamieniły się tylko miejscami. Jak długo jechał Super Express na trasie Wrocław-Warszawa?

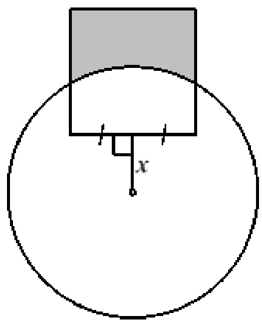
6. Czy numer bieżącego roku (2017) jest liczbą pierwszą?

7. W równoległoboku *KLMN* bok *KL* jest dwa razy dłuższy niż *LM*. Środek *A* boku *KL* połączono odcinkami z wierzchołkami *M* i *N*. Oblicz miarę kąta *MAN*.

8. Wiadomo, że liczby $(a - b + 2017)$, $(b - c + 2017)$ i $(c - a + 2017)$ są w podanej kolejności trzema kolejnymi liczbami całkowitymi. Jakimi?

9. W trójkącie prostokątnym kwadrat długości jednej z przyprostokątnych jest liczbą pierwszą Długości pozostałych boków są liczbami naturalnymi, a obwód trójkąta jest mniejszy od 10. Jakie są długości boków tego trójkąta?

10. Na rysunku przedstawiono okrąg o promieniu 2 i kwadrat o boku 2. Środek okręgu leży na symetralnej boku kwadratu w odległości x od niego. Zacieniowane pole wynosi 2. Ile wynosi x?



EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2017/18
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Niech x oznacza liczbę bombek w małych pudełkach. Wówczas $0{,}9x$ to liczba bombek w dużym pudle. Otrzymujemy $x + 0{,}9x \le 80$ i $x>30$. Stąd $30<x\le 80/1{,}9\approx 42{,}105$. Liczba bombek jest naturalna, więc może wynosić od 31 do 42, ale tylko 10% z 40 jest liczbą naturalną, zatem w małych pudelkach było 40 bombek, a w pudle 36. Wszystkich bombek było 76.

2. Niech x – liczba trójek, y – liczba czwórek. Mamy $y > 3x$, $x + y < 10$ oraz $3x + y \ge 12$. Musi zachodzić $x>1$, bo w przeciwnym razie $y>9$ i $y\le 9$ wykluczają się. Z pierwszego i trzeciego równania wynika, że $y > 3x \ge 12-y$, zatem $y>6$. Warunki $x>1$, $y>6$ oraz $x + y <10$ spełniają liczby $x = 2$ i $y = 7$. Zatem dwóch uczniów otrzymało trójkę.

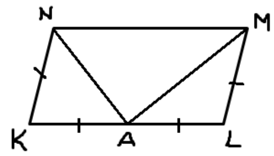
3. Cztery kolejne liczby nieparzyste dają sumę $2n+1+2n+3+2n+5+2n+7 = 8n+16 = 8(n+2)$, a to dzieli się przez 15 wtedy, gdy $n+2$ się dzieli (bo 8 i 15 są względnie pierwsze). Najmniejszą liczbą n spełniającą ten warunek jest 13, zatem szukane liczby to: 27, 29, 31, 33. Za samą odpowiedź przyznajemy 3pkt. Za bardziej skomplikowane rozumowanie (z rozważaniem różnych przypadków) przyznajemy 7 pkt.

4. Liczb stucyfrowych jest $9\cdot 10^{99}$. Najmniejsza to 10…00 (99 zer), a największa 99…99 (100 dziewiątek). Zatem jest ich 99…99 (100 cyfr) – 99…99 (99 cyfr) = 900…00 (99 zer). Można też skorzystać z reguły mnożenia (na pierwszym miejscu cyfra od 1 do 9, na pozostałych dowolna cyfra. Za odpowiedź 10^{100} przyznajemy 2 pkt, za odpowiedź bez uzasadnienia 4 pkt.

5. Niech x i y oznaczają położenie wskazówki godzinowej i minutowej, gdzie $0 \le x, y \le 12$. Wskazówka minutowa porusza się 12 razy szybciej od godzinowej, więc w momencie wyjazdu $y = 12(x-4)$ a w momencie przyjazdu $x = 12(y-7)$. Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $x = 4^8/_{13}$, $y = 7^5/_{13}$. Stąd pociąg wyjechał z Wrocławia 36 i $^{12}/_{13}$ minuty po godzinie 4, a przyjechał do Warszawy 23 i $^{1}/_{13}$ minuty po godzinie 7. Na trasie Wrocław-Warszawa jechał 2 godziny 46 minut i $^{2}/_{13}$ minuty. Za odpowiedź przybliżoną odejmujemy 2 pkt.

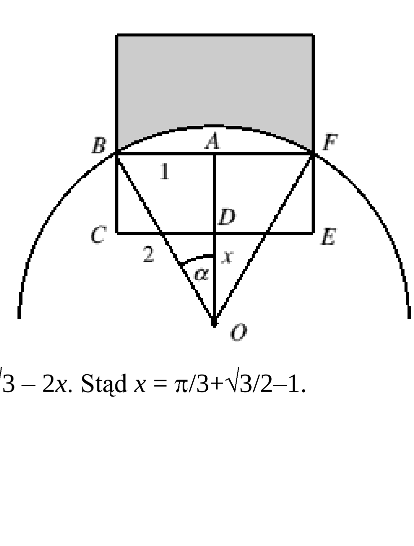
6. Szukamy czynnika właściwego liczby 2017 wśród liczb pierwszych nieprzekraczających 45 (bo $45^2=2025$). Inne sprawdzenia nie są potrzebne. Za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 2 pkt. Za wykonywanie niepotrzebnych sprawdzeń przez liczby złożone lub większe od 45 odejmujemy 2 pkt. Podzielność przez 2, 3, 5 i 11 wynika z cech podzielności. Podzielność przez 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 i 43 trzeba sprawdzić bezpośrednio, ale z użyciem szacowania lub technik sprytnych rachunków, np. przy badaniu podzielności przez 17 mamy 1700 +170+170 = 2040, 2040 – 34 = 2006, czyli 2017 nie dzieli się przez 17. Na życzenie jury uczeń powinien zaprezentować, jak badał podzielność. Jeśli obliczał za każdym razem dokładny wynik dzielenia, w tym na kalkulatorze, odejmujemy 2 pkt.

7. Trójkąty NKA oraz ALM są równoramienne. Niech $|\measuredangle AKN|=2\alpha$. Wtedy $|\measuredangle KAN| = |\measuredangle KNA| = 90°-\alpha$, a z własności sumy kątów równoległoboku $|\measuredangle KNM| = |\measuredangle KLM| = 180°-2\alpha$.. Stąd $|\measuredangle LAM| = |\measuredangle LMA| = \alpha$ i $|\measuredangle MAN| = 180°- (90°-\alpha) - \alpha = 90°$. Za rozwiązanie na przykładzie prostokąta przyznajemy 1 pkt.



8. Środkowa liczba jest średnią arytmetyczną tych trzech liczb, a średnia arytmetyczna podanych liczb wynosi 2017. Zatem pozostałe liczby to 2016 i 2018. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt.

9. Niech x oznacza długość pierwszej przyprostokątnej, gdzie x^2 jest liczbą pierwszą, y – długość drugiej przyprostokątnej, a z – długość przeciwprostokątnej, gdzie $y, z \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Mamy $x+y+z < 10$ oraz z twierdzenia Pitagorasa $x^2 + y^2 = z^2$. To równanie możemy zapisać jako $(z-y)\cdot(z+y) = x^2$. Skoro x^2 jest liczbą pierwszą, a $z-y$ i $z+y$ liczbami naturalnymi, to zachodzi $z-y = 1$ i $z+y = x^2$. Dodając i odejmując te równania stronami, dostajemy $z = {}^1/_2(x^2+1)$ i $y = {}^1/_2(x^2-1)$, a podstawiając te wyrażenia do nierówności $x+y+z < 10$, otrzymujemy warunek $x^2+x < 10$, czyli $x \in \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\}$. Zatem boki trójkąta mają długości $(\sqrt{2}, 1, 2)$, $(\sqrt{5}, 2, 3)$ lub $(\sqrt{7}, 3, 4)$. Za pominiecie jednej możliwości przyznajemy 4 punkty, a dwóch – 2 pkt.



10. Niech O – środek okręgu. BF ma taką długość, jak bok kwadratu, czyli trójkąt BOF jest równoboczny, a $|\measuredangle BOF|=60°$. Zatem wycinek koła BOF jest szóstą częścią koła i ma pole $2/3\pi$, a pole trójkąta OBF wynosi $\sqrt{3}$ i długość OA to też $\sqrt{3}$. Stąd pole odcinka koła BFA wynosi $2/3\pi - \sqrt{3}$. Pole niezacieniowanej części kwadratu wynosi 2, a pole prostokąta $BFEC$ to z jednej strony $2 - (2/3\pi-\sqrt{3})$, a z drugiej $2|AD| = 2(|OA|-x)$. Zachodzi więc: $2 - (2/3\pi-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 2x$. Stąd $x = \pi/3+\sqrt{3}/2-1$.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2017/18
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA
MECZ III

1. W Europie zużycie paliwa podaje się w litrach na 100 przejechanych kilometrów, a w Stanach Zjednoczonych w milach, które można przejechać na jednym galonie paliwa. Jakie spalanie ma w USA samochód, który w Europie pali 10 litrów na 100 kilometrów? Przyjmujemy, że mila to 1,609 km, a galon to 3,785 litra.

2. Która liczba jest większa: $\frac{123456789}{123456790}$ czy $\frac{987654320}{987654321}$?

3. Liczba całkowita dodatnia x spełnia równanie $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{x}$. Ile wynosi x?

4. Jaki kąt tworzą wskazówki zegara o godzinie 15:21?

5. Liczby naturalne k i l spełniają równanie $11k = 19l$. Dla jakich wartości k i l liczba $k+l$ jest pierwsza?

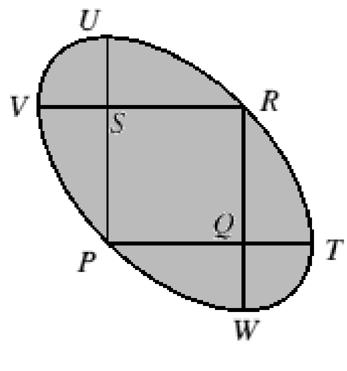
6. Średnią arytmetyczną liczb dodatnich x i y definiujemy jako $\frac{x+y}{2}$, a ich średnią geometryczną jako $\sqrt{xy}$. Dla pewnych liczb stosunek ich średniej arytmetycznej do geometrycznej wynosi 5:4. Ile wynosi stosunek tych liczb?

7. Prostokąt pocięto na trzy przystające części cięciami równoległymi do krótszego boku. Okazało się, że powstały w ten sposób prostokąty podobne do wyjściowego. Jaki jest stosunek długości boków tych prostokątów?

8. Joanna narysowała na kartce pewną liczbę prostych i zauważyła, że każda z nich przecina się dokładnie z 10 innymi. Ile linii narysowała?

9. Ile par dodatnich liczb całkowitych spełnia równanie $4^x = y^2 + 15$?

10. Owal z rysunku powstał z kwadratu *PQRS* o boku długości 1 przez dorysowanie ćwierćokręgów: *TRU* o środku w *P*, *VPW* o środku w *R*, *UV* o środku w *S* i *WT* o środku w *Q*. Oblicz jego obwód.



EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2017/18
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Samochód przejedzie na jednym litrze benzyny 10 km, a na jednym galonie $3{,}785 \cdot 10 = 37{,}85$ km. Zatem na jednym galonie samochód przejedzie $^{37,85}/_{1,609} \approx 23{,}52$ mili. Za błędy rachunkowe, przy prawidłowym sposobie obliczeń odejmujemy 3 pkt.

2. Oba ułamki są mniejsze od 1. Pierwszy o $\frac{1}{123456790}$, a drugi o , drugi jest o $\frac{1}{987654321}$, zatem drugiemu ułamkowi brakuje mniej do 1, więc jest większy.

3. Po uroszczeniu mamy $\sqrt{x} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = \sqrt{72}$, wiec x=72.

4. O 15:20 wskazówki tworzą kąt 20°.Wskazówka minutowa obraca się o 6° na minutę, a godzinowa, która jest 12 razy wolniejsza, kąt 0,5°. Zatem o godzinie 15:21 wskazówki utworzą kąt o mierze 20°+6°–0,5° = 25,5°. Można podać w odpowiedzi dopełnienie tego kąta, czyli 334,5°.

5. Do obu stron równania dodajmy $11l$ i otrzymujemy $11k+11l = 30l$, czyli $11(k+l) = 30l$. Lewa strona tego równania musi być podzielna przez 30, a ponieważ 30 i 11 są względnie pierwsze, to $k+1$ musi być podzielne przez 30, więc nie może być liczbą pierwszą.

6. Mamy $4\,\frac{x+y}{2} = 5\sqrt{xy}$. Stąd $4(x+y)^2 = 25xy$, czyli $4x^2+8xy+4y^2 = 25xy$. Dalej $4x^2-17xy+4y^2 = 0$, co zapisujemy równoważnie jako $(4x-y)(x-4y)=0$. Stąd albo $4x=y$ albo $x=4y$. Szukany stosunek wynosi więc 4:1 lub 1:4. Można założyć na początku, że $x>y$ i podać tylko jedną odpowiedź.

7. Niech długości boków małego prostokąta wynoszą a i 1. Wtedy wyjściowy prostokąt ma boki długości a i 3. Prostokąty podobne mają ten sam stosunek długości boków, zatem musi zachodzić $a:1 = 3:a$ i wtedy stosunek długości boków prostokątów wynosi $a = a:1 = \sqrt{3}$.

8. Niech na płaszczyźnie danych będzie n linii. Jeśli żadne dwie nie są równoległe, każda z nich przecina się z każdą inną, czyli każda przecina $n-1$ linii. Jeśli do tego zestawu dorysujemy jeszcze jedną linię, ale równolegle do jednej z już istniejących, to ta nowa linia także przetnie $n-1$ linii. Na rysunku Joanny każda prosta przecina tę samą liczbę linii, co oznacza, że każda narysowana prosta musi należeć do rodziny k równoległych linii, dla pewnej wartości naturalnej k. Wówczas liczba wszystkich prostych jest wielokrotnością liczby k, powiedzmy, że wynosi kn. Wówczas każda linia przecina $k(n-1)$ linii do niej nierównoległych. Na rysunku Joanny $k(n-1) = 10$, więc zarówno k jak i $n-1$ muszą być dzielnikami 10, czyli należeć do zbioru $\{1, 2, 5, 10\}$, co daje $n = 11, 6, 3, 2$ oraz $k = 1, 2, 5, 10$. Zatem Joanna mogła narysować jeden z następujących rysunków: a) 11 linii nierównoległych (k=1, n=11), b) po 2 linie równoległe w każdym z 6 kierunków (k=2, n=6), c) po 5 linii równoległych w każdym z 3 kierunków (k=5, n=3), d) po 10 linii równoległych w każdym z 2 kierunków (k=10, n=2). To wyczerpuje wszystkie możliwości. Za pokazanie czterech konfiguracji bez uzasadnienia, że innych nie ma przyznajemy 4 pkt. Za pominięcie jednej przyznajemy 3 pkt, za pominięcie dwóch 2 pkt, za pokazanie tylko jednej przyznajemy 1 pkt.

9. Równanie można zapisać równoważnie jako $\left(2^x\right)^2 - y^2 = 15$, czyli $(2^x+y)(2^x-y) = 15$. Stąd $2^x+y = 5$ i $2^x-y=3$ lub $2^x+y = 15$ i $2^x-y = 1$ (bo szukamy rozwiązań całkowitych dodatnich i znamy porządek czynników). Z tych warunków otrzymujemy 2 pary spełniające równanie (2, 1) i (3, 7). Za pominięcie jednej przyznajemy 4 pkt.

10. Promień ćwierćokręgu TRU (i VPW) wynosi $PR = PU = \sqrt{2}$. Promień SU (i QW) ma długość $\sqrt{2}-1$. Obwód owalu wynosi $2\cdot 1/4\cdot 2\pi\sqrt{2} + 2\cdot 1/4\cdot 2\pi(\sqrt{2}-1) = (2\sqrt{2}-1)\pi$.