DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1) Znajdź takie liczby $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2015}$, które spełniają następujące warunki: $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{2015}| = 1$ oraz $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{2014}x_{2015} + x_{2015}x_1 = 0$.

2) Para (a, b) spełnia poniższy układ równań. Oblicz sumę liczb a i b.
$2015x+2016y = 16126$
$0{,}125x + {}^{1}/_{8}\,y = 1$.

3) Trójkąt prostokątny ma przeciwprostokątną długości $7\sqrt{65}$, obwód $75+7\sqrt{65}$ i pole 637. Jakie ma długości przyprostokątnych?

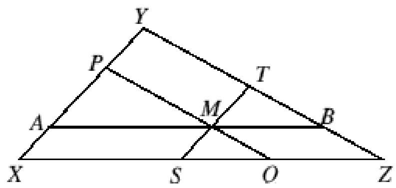
4) Jaką resztę z dzielenia przez 24 daje suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych?

5) W ilu maksymalnie punktach mogą się przeciąć przekątne sześciokąta?

6) Wiedząc, że suma kwadratów kolejnych liczb naturalnych od 1 do n wynosi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, oblicz sumę kwadratów kolejnych liczb nieparzystych od 1 do 2015.

7) Czy koło o promieniu 2 można pokryć czterema kołami o promieniu 1?

8) W trójkącie XYZ boki XY, YZ i ZX mają długości równe odpowiednio 2, 3 i 4. W trójkącie wybrano punkt M, przez który poprowadzono proste równoległe do boków trójkąta jak na rysunku. Okazało się, że odcinki AP, QS i BT mają jednakową długość. Ile ona wynosi?



9) Czy liczba nieparzysta i połowa następującej po niej liczby parzystej mogą mieć wspólny dzielnik większy niż 1?

10) Czy 12-kąt foremny można podzielić na wielokąty foremne?

EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Z pierwszego warunku widać, że szukane liczby są równe 1 lub -1, zatem iloczyny takich liczb również. Aby suma jedynek i minus jedynek dała zero, składników musi być parzysta liczba, a w podanej sumie jest ich 2015. Zatem nie istnieją liczby o zadanych własnościach. Za poprawne lecz bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt.

2. Mnożymy obie strony drugiego równanie przez 8. Widać, że suma a i b jest równa 8. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 4 punkty.

3. Niech a i b to szukane długości przyprostokątnych. Mamy $a^2+b^2 = 49\cdot 65 = 3185$, $a+b = 75$, $0{,}5\cdot ab = 637$. Zachodzi $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$, zatem powinno być $75^2 = 49\cdot 65 + 2\cdot 2\cdot 637$. Jednak $5625 \neq 3185 + 2548 = 5733$. Trójkąt o podanych własnościach nie istnieje.

4. Trzy kolejne liczby parzyste to $2n$, $2n+2$ i $2n+4$. Obliczamy $(2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 = 8n^3 + 8n^3 + 3\cdot 4n^2\cdot 2 + 3\cdot 2n\cdot 4 + 8 + 8n^3 + 3\cdot 4n^2\cdot 4 + 3\cdot 2n\cdot 16 + 64 = 24n^3 + 24n^2 + 48n^2 + 24n + 96n + 72 = 24(n^3+n^2+2n^2+n+4n+3) = 24(n^3+3n^2+5n+3)$. Zatem szukana reszta wynosi 0.

5. Aby przecięć było jak najwięcej, należy tak skonstruować sześciokąt, aby żadne trzy przekątne nie przecinały się w jednym punkcie. Wówczas każde przecięcie jest jednoznacznie wyznaczone przez przecięcie przekątnych w czworokącie, który powstał przez wybór czterech wierzchołków spośród wierzchołków sześciokąta. Takich czworokątów jest $\binom{6}{4}$, czyli 15. Za zliczanie „na piechotę” przyznajemy 6 pkt. Za zastosowanie metody matematycznej bardziej skomplikowanej (dającej bardziej skomplikowane rachunki) odejmujemy 2 pkt.

6. Sumę $1^2+3^2+5^2+\ldots+2013^2+2015^2$ można zapisać jako $(2\cdot 0+1)^2+(2\cdot 1+1)^2+(2\cdot 2+1)^2+\ldots+(2\cdot 1006+1)^2+(2\cdot 1007+1)^2 = (4\cdot 0^2+2\cdot 2\cdot 0+1^2) + (4\cdot 1^2+2\cdot 2\cdot 1+1^2) + (4\cdot 2^2+2\cdot 2\cdot 2+1^2) + \ldots + (4\cdot 1006^2+2\cdot 2\cdot 1006+1^2) + (4\cdot 1007^2+2\cdot 2\cdot 1007+1^2) = 4\cdot(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+1006^2+1007^2) + 4\cdot(0+1+2+3+\ldots+1006+1007) + 4\cdot(1+1+1+\ldots+1)$, gdzie w ostatnim nawiasie jest 1008 jedynek. Korzystamy z podanej zależności, otrzymując $4\cdot\frac{1007\cdot 1008\cdot 2015}{6}+4\cdot\frac{1007\cdot 1008}{2}+4\cdot 1008 =$ $1363558560+ 2030112+4032 = 1365592704$.

7. Cztery koła nie wystarczą. Wpisujemy w duże koło sześciokąt foremny (6 odcinków o długości 2). Każdy z tych odcinków musi być pokryty innym kołem, będą to koła o rozłącznych wnętrzach. Kół musi więc być co najmniej 6. Za odpowiedz bez uzasadnienia przyznajemy 1 pkt.

8. Wszystkie trójkąty powstałe na rysunku są podobne (cecha kkk), zatem wszystkie mają stosunek boków równy 2:3:4. Niech x oznacza szukaną długość AP. Wówczas $|AM|=2x$. Ponadto $|BT|=x$ i $|BM|={}^4/_3\,x$. Czworokąt $AMSX$ z konstrukcji jest równoległobokiem, czyli $|AM|=|XS| = 2x$. Podobnie $|BM|=|QZ|={}^4/_3\,x$. Ponieważ $|XS|+|SQ|+|QZ| = 4$, $2x+x+{}^4/_3\,x =4$, skąd $x={}^{12}/_{13}$.

9. $2n + 1$ jest liczbą nieparzystą, a połowa kolejnej liczby to $n+1$. Zachodzi $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(a-b, b)$ – algorytm Euklidesa. Mamy więc: $\mathrm{NWD}(2n+1, n+1) = \mathrm{NWD}(2n+1-(n+1), n+1) = \mathrm{NWD}(n, n+1) = \mathrm{NWD}(n, n+1-n) = \mathrm{NWD}(n, 1) = 1$. Zatem podane liczby są względnie pierwsze.

10. Narysujmy sześciokąt foremny i na jego bokach zbudujmy kwadraty. Dziury między kwadratami wypełniają trójkąty równoboczne (równoramienne z kątem 60°), co daje w sumie 12-kąt foremny.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16

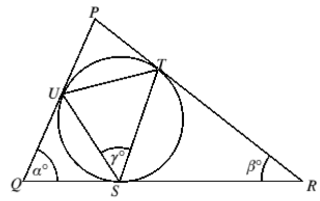
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1) Walet Kier mówi prawdę zawsze w poniedziałki, wtorki, środy i czwartki, a pozostałe dni tygodnia kłamie. Walet Karo mówi prawdę w piątki, soboty, niedziele i poniedziałki, a w pozostałe dni kłamie. W zeszłym tygodniu obaj powiedzieli równocześnie: Wczoraj kłamałem. W jakim dniu tygodnia miało to miejsce?

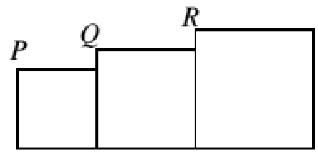
2) Jaką resztę z dzielenia przez 3 daje suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych.

3) W trójkąt PQR wpisano okrąg styczny do boków w punktach S, T, U jak na rysunku. Wykaż, że γ jest pewną średnią α i β.



4) Znajdź takie liczby $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2014}$, które spełniają następujące warunki: $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{2014}| = 1$ oraz $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{2013}x_{2014} + x_{2014}x_1 = 0$.

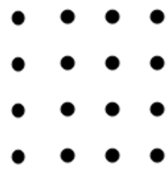
5) Trzy kwadraty ustawiono jak na rysunku, tak że ich podstawy tworzą linię prostą. Również wierzchołki P, Q, R leżą na linii prostej. Środkowy kwadrat ma bok o 8 cm dłuższy niż najmniejszy, a największy kwadrat ma bok długości 50 cm. Jaka jest długość boku najmniejszego kwadratu?



6) Do jakiej potęgi należy podnieść dwumian $(a+x)$, aby współczynnik przy x^2 był równy 66?

7) Wyznaczyć pary (x, y) spełniające równanie $x^2+y^2 = x+y+8$.

8) Przez dowolny punkt wewnątrz trójkąta ABC prowadzimy proste równoległe do jego boków. Dzielą one trójkąt na sześć figur, z których trzy są trójkątami o polach S_1, S_2, S_3. Wykaż, że $S_{ABC} = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.



9) Ile różnych trójkątów można uzyskać wybierając trzy punkty spośród szesnastu z rysunku?

10) Czy koło o promieniu 2 można pokryć dziewięcioma kołami o promieniu 1?

EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Kiedy jakiś walet mówi „Wczoraj kłamałem” może to być prawda i poprzedniego dnia rzeczywiście kłamał, lub kłamie obecnie, co znaczy, że poprzedniego dnia mówił prawdę. W poniższej tabelce oznacza to, że w jednym wierszu K stoi przed P albo P stoi przed K. jednocześnie może się tak zdarzyć tylko w piątek.

walet	PN	WT	ŚR	CZ	PT	SO	ND
Kier	P	P	P	P	K	K	K
Karo	P	K	K	K	P	P	P

2. Obliczamy $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4 = 3n^2+6n+5 =(3n^2+6n+3)+2 = 3(n^2+2n+1)+2$. Zatem szukana reszta wynosi 2.

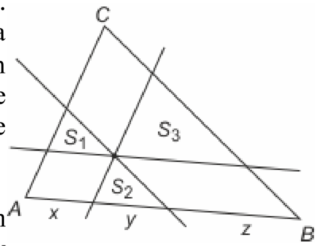
3. Boki trójkąta są styczne do okręgu, a odcinki stycznych od wspólnego wierzchołka do punktu styczności są jednakowe (dwusieczna kąta, która łączy wierzchołek ze środkiem okręgu wpisanego w kąt jest osią symetrii tej figury). Zatem $|QU|=|QS|$ oraz $|RT|=|RS|$. To znaczy, że trójkąty QUS i RTS mają równe pozostałe (nieoznaczone) kąty. Zatem $|\measuredangle QSU| = (180-\alpha/2)°$ i $|\measuredangle RST|=(180-\beta/2)°$. Zatem $(180-\alpha/2) + \gamma + (180-\beta/2) = 180$, a stąd $\gamma = (\alpha+\beta)/2$ i jest to średnia arytmetyczna.

4. Z pierwszego warunku widać, że szukane liczby są równe 1 lub -1, zatem iloczyny takich liczb również. Aby suma jedynek i minus jedynek dała zero, jedynek musi być tyle samo, co minus jedynek. Jedynka powstaje z iloczynu liczb z tym samym znakiem, a minus jedynka z iloczynu liczb z przeciwnym znakiem. Zatem par ze zgodnym znakiem musi być tyle samo, co par ze znakiem przeciwnym, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy liczba szukanych liczb dzieli się przez 4, a 2014 się nie dzieli. Zatem nie istnieją liczby o zadanych własnościach.

5. Niech x oznacza długość boku najmniejszego kwadratu. Zatem kolejne kwadraty mają boki o długości x, $x+8$ i 50. Tangens kąta nachylenia prostej PR do poziomu obliczany na dwa sposoby wynosi więc ${}^8/_x = {}^{50-x}/_{2x+8}$. Stąd mamy równanie $8(2x+8) = x(50-x)$ równoważne równaniu $x^2-34x+64 = 0$. Równanie to ma dwa dodatnie pierwiastki 2 i 32, zatem są dwie możliwe długości boku najmniejszego kwadratu spełniające warunki zadania. Za pominięcie jednej z możliwości odejmujemy 5 pkt.

6. W potędze drugiej x wystąpi w składniku $\binom{n}{2}x^2a^{n-2}$. Współczynnik liczbowy ma być równy 66, zatem $n(n-1) = 132$ i $n=12$.

7. Przenosimy zmienne na lewą stronę równania i możemy ją zapisać jako $(2x-1)^2+(2y-2)^2 = 34$. Teraz rozkładamy 34 na sumy dwóch liczb nieparzystych, które są kwadratami. Jedyna możliwość to 9+25. Stąd $2x-1=\pm3$ i $2y-1=\pm5$ (lub na odwrót). Za pominięcie liczb ujemnych odejmujemy 5 pkt. Zatem $x=2$ lub $x=-1$ oraz $y=3$ lub $y=-2$ (lub na odwrót). Pary spełniające równanie to (2, 3), (3, 2) (2, -2), (-2, 2), (-1, 3), (3, -1), (-1, -2), (-2, -1). Za pominięcie rozwiązań symetrycznych odejmujemy 4 pkt.



8. Zauważmy, że trójkąty o polach S_1, S_2 i S_3 są podobne do wyjściowego trójkąta ABC w skalach odpowiednio $k_1 = {}^x/_c$, $k_2 = {}^y/_c$ i $k_3 = {}^z/_c$ (z cechy kkk). Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, skąd otrzymujemy równość $\sqrt{S_1}/\sqrt{S_{ABC}} + \sqrt{S_2}/\sqrt{S_{ABC}} + \sqrt{S_3}/\sqrt{S_{ABC}} = x/c + y/c + z/c = c/c = 1$. Stąd po przekształceniu mamy tezę.

9. Liczba możliwych wyborów trzech punktów z 16 wynosi $\binom{16}{3}$. Od tego trzeba odjąć liczbę trójek współliniowych. W każdym rzędzie z czterema punktami można takie punkty wybrać na 4 sposoby (jeden punkt odrzucamy), a rzędów jest 10 (4 wiersze, 4 kolumny i 2 przekątne). Ponadto istnieją 4 rzędy z trzema punktami – to linie powyżej i poniżej głównych przekątnych. Ostatecznie liczba trójkątów wynosi $\binom{16}{3} - 10\cdot4 - 4 = \frac{14\cdot15\cdot16}{1\cdot2\cdot3} - 40 - 4 = 560-44=516$. Za zliczanie ‘na piechotę’ przyznajemy 6 pkt. Za poprawne lecz bardziej skomplikowane obliczenia odejmujemy 2 pkt.

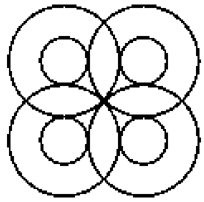
10. Wpisujemy duże koło w kwadrat, który dzielimy na 9 mniejszych kwadratów. Każdy z nich ma bok o długości ${}^4/_3$, czyli przekątna kwadratu to ${}^4/_3\cdot\sqrt{2}$. Każdy taki kwadracik można zakryć kołem o promieniu 1, bo promień okręgu opisanego na takim kwadraciku to połowa przekątnej, czyli ${}^2/_3\cdot\sqrt{2}$, a $1 = {}^2/_3\cdot{}^3/_2$, przy czym ${}^3/_2\cdot= 1,5 > \sqrt{2} \approx 1,41$. Zatem 9 kół jednostkowych pokryje z nawiązką koło o promieniu 2.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

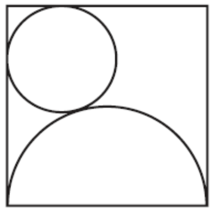
MECZ III

1) Piotruś Pan ma karty z wydrukowanymi na nich liczbami od 1 do 25. Chce z nich ułożyć jak najdłuższy ciąg w taki sposób, aby każde dwie sąsiednie karty miały wspólny dzielnik będący liczbą pierwszą. Jaki najdłuższy ciąg może ułożyć Piotruś Pan?



2) Do spokojnego stawu wrzucono jednocześnie cztery jednakowe kamienie w wierzchołkach kwadratu. Po pewnym czasie rozchodzące się kręgi na wodzie utworzyły figurę z rysunku (każdy większy krąg jest styczny do jednego większego i dwóch mniejszych). Większy krąg ma promień 1. Jaki promień ma mniejszy?

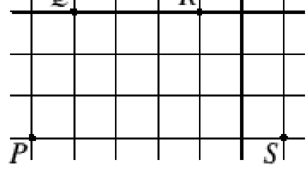
3) Uzasadnij, że jeśli dla par liczb (a, b) i (c, d) zachodzi równość iloczynu sum kwadratów liczb z każdej pary oraz kwadratu sumy iloczynów liczb z każdej pary, to iloczyny liczb zewnętrznych i wewnętrznych w tych parach są równe.



4) Półokrąg i okrąg są umieszczone w kwadracie o boku długości 2 cm. Okrąg jest styczny do dwóch sąsiednich boków kwadratu i do półokręgu, a średnicą półokręgu jest jeden z przeciwległych boków kwadratu. Ile wynosi promień okręgu?

5) Z czterech różnych cyfr tworzymy wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach, a następnie wszystkie utworzone liczby dodajemy. Jaka jest największa liczba pierwsza, która dzieli tę sumę?

6) Szklane wazony mają kształt walca. Większy ma średnicę 20 cm, a mniejszy średnicę 10 cm i wysokość 16 cm. Większy wazon jest częściowo wypełniony wodą. Mniejszy wazon, początkowo pusty, wstawiamy do większego i zaczyna się doń wlewać woda. Kiedy mniejszy walec stoi już na dnie większego, jest napełniony do połowy. Jaka była na początku wysokość słupa wody w większym wazonie?



7) Niech $f(x) = x + \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2+1}}$? Ile wynosi $f(2015)$?

8) Znajdź długość promienia okręgu opisanego ma czworokącie PQRS.

9) Kwadratowy kawałek bibuły o boku długości 1 cm nasączono atramentem, a następnie umieszczono na środku białej kartki papieru. Kawałek bibuły obrócono o 180° wokół jednego z wierzchołków tak, że całą powierzchnią dotykał stale papieru. Na koniec bibułę usunięto. Jak duże pole na kartce zostało zamazane atramentem?

10) Pewna funkcja zdefiniowana na dodatnich liczbach całkowitych ma następującą własność dla wszystkich x i y: $f(xy) = f(x) + f(y)$. Wiadomo ponadto, że $f(10) = 14$ i $f(40) = 20$. Ile wynosi $f(500)$?

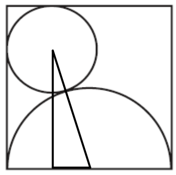
EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2015/16
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Na kartach jest 5 liczb, które nie mogą mieć żadnego wspólnego czynnika pierwszego z żadną inną liczbą (są to 1, 13, 17, 19, 23). Tych kart w ogóle nie można umieścić w ciągu. Za zauważenie tego przyznajemy 4 pkt. Pozostałe 20 kart można ułożyć w żądany ciąg. Oto przykładowy układ: 11, 22, 18, 16, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 24, 3, 9, 21, 7, 14, 20, 25, 15, 5. Za ułożenie ciągu długości 10-11 przyznajemy 1 pkt, za 12-13 - 2 pkt, za 14-15 - 3 pkt, za 16-17 - 4 pkt, za 18-19 - 5pkt i za 20 - 6 pkt.

2. Oznaczmy przez A, B, C i D środki kolejnych małych okręgów (czyli wierzchołki kwadratu), a przez r promień małych okręgów. Gdy okręgi są styczne zewnętrznie odległość środków jest sumą ich promieni, czyli $|AB| = |BC| = 1+r$, natomiast $|AC| = 1+1 = 2$. Z twierdzenia Pitagorasa $(1+r)^2 + (1+r)^2 = 2^2$, czyli $(1+r)^2 = 2$, czyli $1+r = \sqrt{2}$ (wielkość dodatnia) i ostatecznie $r=\sqrt{2}-1$.

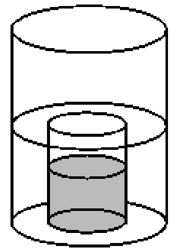
3. Z treści zadania wynika, że jeżeli $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2$, to $ad = bc$. Przekształcamy pierwszą równość: $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = a^2c^2+2acbd+b^2d^2$. I dalej $a^2d^2+b^2c^2-2acbd = 0$, co daje $(ad)^2-2adbc+(bc)^2 = 0$, czyli $(ad-bc)^2 = 0$, zatem $ad-bc = 0$.

4. Niech r oznacza promień okręgu. Połączmy środki okręgu i półokręgu z punktem styczności tych figur. To połączenie jest odcinkiem (bo w punkcie styczności okręgi mają wspólną styczną, a promień jest do niej prostopadły – za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 2 pkt). Z twierdzenia Pitagorasa mamy $(2-r)^2+(1-r)^2 = (r+1)^2$. Stąd otrzymujemy równanie $r^2-8r+4=0$, które ma dwa pierwiastki $4-2\sqrt{3}$ i $4+2\sqrt{3}$. Oba są dodatnie, ale ten większy promień nie mieści się w kwadracie. Mamy więc tylko jedno rozwiązanie. Za podanie obu odejmujemy 5 pkt. Za podanie tego większego przyznajemy 2 pkt za analizę rysunku i rozwiązanie równania.



5. Z czterech cyfr tworzymy $24 = 4\cdot3\cdot2\cdot1$ liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach (pierwszą cyfrę wybieramy na 4 sposoby, drugą na 3, trzecią na 2, czwartą na 1). Wśród tych liczb w sześciu cyfra a jest na pozycji tysięcy, w sześciu na pozycji setek, w sześciu na pozycji dziesiątek i w sześciu na pozycji jedności. Podobnie jest z pozostałymi cyframi. Zatem po dodaniu 24 liczb otrzymamy $(6a+6b+6c+6d)\cdot1000 + (6a+6b+6c+6d)\cdot100 + (6a+6b+6c+6d)\cdot10 + (6a+6b+6c+6d) = (6a+6b+6c+6d)\cdot1111$. Ta liczba to inaczej $6\cdot1111(a+b+c+d)$ co w rozkładzie na czynniki pierwsze (poza ew. ostatnim) daje $6\cdot11\cdot101(a+b+c+d)$. Nie wiemy, czy składnik w nawiasie jest pierwszy, ale na pewno jest mniejszy od 101 (bo to jest maksymalnie $9+8+7+6 = 30$). Zatem największym szukanym dzielnikiem pierwszym jest 101. Jeśli nie zrobi tego sam, na prośbę jury uczeń powinien sprawdzić pierwszość liczby 101. Jeśli tego nie potrafi, odejmujemy 5 pkt.

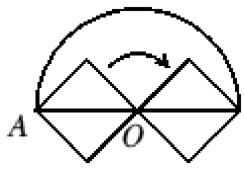
6. Niech h oznacza szukaną wysokość słupa wody w większym wazonie. Objętość tej wody wynosi $\pi\cdot10^2\cdot h$ cm^3. Po całkowitym zanurzeniu mniejszego wazonu wysokość słupa wody w większym jest taka, jak wysokość mniejszego wazonu (inaczej woda nadal by się doń wlewała), czyli wynosi 16 cm. Całkowita objętość wody się nie zmieniła, ale teraz wypełnia ona zewnętrzny wazon do wysokości 16 cm z dziurą pośrodku na pustą połowę mniejszego wazonu, czyli $\pi\cdot10^2\cdot h = \pi\cdot10^2\cdot16 - \pi\cdot5^2\cdot8$, skąd $100\pi h = 1600\pi - 200\pi$, zatem $h=14$ cm.



7. $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)+1}{x-\sqrt{x^2+1}}$. Licznik daje $x^2-\sqrt{x^2+1}^{\,2}+1$ = -1+1 = 0. Zatem $f(x) = 0$ i $f(2015) = 0$.

8. Środek okręgu leży na symetralnej każdej cięciwy, zatem także na symetralnych odcinków QR i PS. Te symetralne są jednak prostymi równoległymi, nie mają punktu wspólnego, a zatem środek szukanego okręgu nie istnieje. Za poprawne lecz bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2-3 pkt.

9. Wykonajmy obrót bibuły wokół wierzchołka O leżącego naprzeciw A. Punkt A zakreśli półokrąg o środku w O i promieniu $|OA|=\sqrt{2}$. Pole zakolorowane atramentem składa się więc z półkola i wystających zeń dwóch połówek kwadratu (jak na rysunku). Pole tej figury to $2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}^2 = 1+\pi$.



10. Używając kilka razy własności $f(xy) = f(x) + f(y)$ otrzymamy $f(2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5) = f(2)+f(2)+f(5)+f(5)+f(5) = 2f(2) + 3f(5)$. Z kolei $f(40) = f(2)+f(2)+f(10)$, czyli $20 = 2f(5)+14$, skąd $f(2)=3$. Podobnie $f(10) = f(2)+f(5)$, czyli $14 = 3+f(5)$, skąd $f(5)=11$. Zatem $f(500) = 2\cdot3+3\cdot11 = 39$.