DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1. Na ile trójkątów prostokątnych da się rozciąć prostokąt?
2. Czy liczba $\sqrt[3]{77}$ jest wymierna?
3. Na płaszczyźnie danych jest 6 odcinków. Udowodnij, że da się spośród nich wybrać trzy, wśród których żadne dwa nie mają punktów wspólnych, lub trzy, wśród których każde dwa mają punkty wspólne.
4. W czasie pierwszej wojny światowej w pobliżu pewnego zamku toczyła się bitwa. Jeden z pocisków rozbił stojącą u wejścia statuę rycerza z piką w ręką. Stało się to ostatniego dnia miesiąca. Iloczyn numeru dnia, w którym to się zdarzyło, numeru miesiąca, wyrażonej w pełnych stopach długości piki, połowy wyrażonego w pełnych latach wieku dowódcy baterii strzelającej do zamku, połowy wyrażonego w pełnych latach czasu, jaki stała statua, równa się 451066. W którym roku postawiono statuę?
5. Udowodnij, że jeśli a jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4, to jej kwadrat pomniejszony o 4 dzieli się przez 16.
6. Dla jakich liczb pierwszych p da się znaleźć dwie kolejne liczby całkowite, których suma jest podzielna przez p ?
7. Wiadomo, że wielomian x^2+ax+b o współczynnikach całkowitych ma dwa pierwiastki i że -5 jest jednym z nich. Czy drugi pierwiastek tego wielomianu musi być liczbą całkowitą?
8. Czy można zbudować taki sześciokąt, żeby z żadnych trzech jego boków nie można było zbudować trójkąta?
9. To jest pewien wyraz zapisany alfabetem Morse'a, ale komputer „zjadł” wszystkie znaki separujące litery: — • • — — — — • •. Na ile sposobów można przeczytać ten napis (niezależnie od tego, czy przeczytany wyraz ma sens)?
10. Czy zdarza się tak, żeby na zegarze, którego obie wskazówki są identyczne, w ciągu 12 godzin jedno położenie wskazówek odpowiadało dwóm różnym godzinom?

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Przekątna rozcina prostokąt na 2 trójkąty prostokątne. W każdym z nich wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli go znowu na 2 trójkąty prostokątne, więc opuszczając takie wysokości otrzymujemy w każdym kroku o jeden trójkąt prostokątny więcej. Możliwy jest więc podział na dowolną (>1) liczbę trójkątów.

2. Liczba $\sqrt[3]{77}$ jest pierwiastkiem równania $x^3 - 77 = 0$. Gdyby był to pierwiastek wymierny, to byłby całkowity i dzieliłby wyraz wolny. W grę wchodzą więc liczby ±1, ±7, ±11, ±77. Łatwo sprawdzić, że żadna z tych liczb w trzeciej potędze nie jest równa 77. Można też przeprowadzić dowód wykorzystujący podzielność i powołać się w nim na twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie liczby na czynniki pierwsze.

3. Wybierzmy dowolny spośród danych odcinków. Wówczas z pozostałych pięciu odcinków na pewno da się wybrać takie trzy, że żaden z nich nie ma punktów wspólnych z wybranym na początku, albo takie trzy, że każdy z nich ma z nim punkt wspólny. Załóżmy, że teza zadania nie jest spełniona. Wówczas w pierwszym z wymienionych przypadków pewne dwa z dobranych trzech odcinków nie mają punktów wspólnych, co prowadzi do sprzeczności, ponieważ wraz z odcinkiem wybranym jako pierwszy tworzą taką trójkę, której żadne dwa odcinki nie mają punktów wspólnych, natomiast jeśli zachodzi druga sytuacja, to dwa spośród dobranych odcinków mają punkt wspólny, czyli wraz z pierwszym są trójką, której każde dwa odcinki mają punkt wspólny.

4. Z treści zadania wynika, że występujące w niej niewiadome to dzielniki liczby 451066. Rozkład tej liczby na czynniki pierwsze ma 5 czynników: $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 101$, każdy z nich musi więc odpowiadać jednej danej z zadania. Spośród możliwych ostatnich dni miesiąca mamy tu tylko 29, więc bitwa miała miejsce 29 lutego. W trakcie I w. św. jedynym rokiem przestępnym był 1916. Z analizy pozostałych danych wynika, że statua stoi już $2 \cdot 101$ lat, czyli postawiono ją w 1714 r.

5. Przedstawmy daną liczbę jako iloczyn: $a^4 + 4 = (a^2+2)^2 - (2a)^2 = (a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$. Ponieważ $a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1$, oba jego czynniki są większe od 1, więc $a^4 + 4$ jest liczbą złożoną.

6. Poza dwójką liczby pierwsze są nieparzyste. Każda liczba nieparzysta jest sumą kolejnych liczb naturalnych: $2k+1=k+(k+1)$, zatem warunki zadania spełniają wszystkie liczby pierwsze z wyjątkiem 2.

7. Tak. Wynika to natychmiast ze wzorów Viète'a. Uczniowie mogą też przeprowadzić odpowiednie rachunki.

8. Tak. Jego boki mogą mieć np. długości: 1, 2, 4, 7, 12 i 20. Należy sprawdzić, że z żadnych trzech boków nie powstaje trójkąt, i uzasadnić, że z podanych odcinków można utworzyć sześciokąt.

9. Napis składa się z 9 znaków. Ostatnia litera może być zakodowana a) jednym, b) dwoma, c) trzema lub d) czterema znakami. W przypadku a) powstaje pytanie, na ile sposobów przeczytać napis z 8 znaków, w przypadku b) – z 7, w c) – z 6 i w d) – z 5. Oznaczmy przez T_i liczbę sposobów przeczytania napisu złożonego z i znaków. $T_9 = T_8 + T_7 + T_6 + T_5$. Analogicznie $T_8 = T_7 + T_6 + T_5 + T_4$, $T_7 = T_6 + T_5 + T_4 + T_3$ itd. ($T_1 = 1$) Ostatecznie otrzymujemy: $T_9 = 108$.

10. Załóżmy, że jest tak o godzinie h i m minut. Wówczas kąt między wskazówką godzinową a godziną 12 wynosi (w stopniach) $30h+m/2$, natomiast kąt między minutową a 12 – $6m$. Gdyby ten układ wskazówek wystąpił też o godzinie h' minut m', mielibyśmy $\begin{cases} 30h' + \frac{m'}{2} = 6m \\ 6m' = 30h + \frac{m}{2} \end{cases}$. Biorąc h=1, h'=2, otrzymamy układ równań na m i m', którego rozwiązaniem jest para liczb mieszczących się w przedziale <0,60), więc opisana w zadaniu sytuacja może mieć miejsce.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1. Dla jakich całkowitych k wyrażenie $\frac{2k+1}{k+2}$ ma wartość całkowitą?

2. Wieszając firankę w pierwszym kroku przyczepiamy jej końce, a w każdym następnym dodajemy żabki dokładnie pośrodku między już doczepionymi. Na ilu żabkach będzie zaczepiona firanka po n krokach?

3. Udowodnij, że $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}+\ldots<1$. (W mianownikach występują iloczyny kolejnych liczb pierwszych.)

4. Na L Międzynarodowej Konferencji Paleoantropologicznej w Ustrzykach Dolnych każdy spośród przybyłych Szwedów zawarł znajomość z n Etiopczykami, a każdy Etiopczyk zapoznał się z n Szwedami. Udowodnij, że wśród uczestników konferencji Szwedów i Etiopczyków było tyle samo.

5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o średnicy d i $\overline{AC}\perp\overline{BD}$. Udowodnij, że $AB^2+CD^2=d^2$.

6. Wybierzmy 2017-elementowy zbiór liczb pierwszych $\{p_1, p_2, ..., p_{2017}\}$. Oblicz liczbę dzielników liczby $p_1^1\cdot p_2^2\cdot p_3^3\cdot\ldots\cdot p_{2017}^{2017}$.

7. Znajdź wszystkie osie symetrii figury złożonej z dwóch prostych w przestrzeni.

8. Pewne miesiące w roku rozpoczynają się tym samym dniem tygodnia. Które?

9. Znajdź wszystkie funkcje nieparzyste f spełniające warunek $f(x-3)=f(3-x)$ dla każdego x rzeczywistego.

10. Sześcian jednostkowy przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną pewnej ściany i nachyloną do niej pod kątem α. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. $\frac{2k+1}{k+2} = 2 - \frac{3}{k+2}$, więc szukamy takich k, żeby k+2 dzieliło 3. Zatem k+2 może być równe 3, –3, 1 lub –1.
2. a_1=2, a w każdym następnym kroku żabek jest 2 razy tyle co poprzednio minus 1, czyli $a_n=2^{n-1}+1$.
3. Zmieńmy mianowniki w podanej sumie na kolejne potęgi dwójki. Zmieniona suma jest wówczas mniejsza od oryginalnej, przy czym wynosi 1, co dowodzi podanej w zadaniu nierówności.
4. Przedstawmy Szwedów i Etiopczyków jako punkty płaszczyzny, łącząc z każdym Szwedem tych Etiopczyków, których poznał podczas konferencji. Jeśli Szwedów jest k, to połączeń będzie kn. Z drugiej strony każdy Etiopczyk jest połączony z n Szwedami, musi ich więc być również k.
5. Niech $\overline{CE}$ będzie średnicą danego okręgu. Kąt CDE jest oparty na półokręgu, więc z twierdzenia Pitagorasa mamy $CD^2 + DE^2 = d^2$. Pokażemy teraz, że $DE=AB$, co zakończy dowód. $\overline{AE} \perp \overline{AC}$ (kąt oparty na półokręgu), więc ($\overline{AC} \perp \overline{BD}$) $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$ to dwie równoległe cięciwy, czyli ich wspólna symetralna jest osią symetrii czworokąta $ABDE$, co daje $DE=AB$.
6. Każdy z tych dzielników jest iloczynem pewnych potęg liczb p_i, konkretnie dla liczby p_i możemy mieć najwyżej podzielność przez p_i^i. Wszystkich takich iloczynów jest więc 2·3·4·... 2018 (każda liczba p_i może być też wzięta w zerowej potędze).
7. Kiedy obie proste leżą na jednej płaszczyźnie, możliwe są dwie sytuacje: nieskończenie wiele osi przy prostych równoległych (równoległa do nich i wszystkie prostopadłe) oraz trzy osie w przeciwnym przypadku (dwie zawierające dwusieczne utworzonych kątów i jedna do nich prostopadła). Jeśli proste są skośne, to istnieje płaszczyzna równoległa do jednej z tych prostych zawierająca drugą z nich. Wówczas rzuty osi symetrii na tę płaszczyznę muszą być osiami lub środkami symetrii figury będącej rzutem tych dwu prostych, czyli podobnie jak wyżej są trzy możliwości. Każda z tych symetrii na płaszczyźnie odpowiada jednej osi symetrii w przestrzeni (dwie leżące w płaszczyźnie równoległej i wspólna prostopadła), co można łatwo wykazać geometrycznie.
8. W każdym roku istnieją dwie takie pary miesięcy: marzec i listopad oraz kwiecień i lipiec. W roku nieprzestępnym dochodzi para styczeń-październik, a para marzec-listopad przekształca się w triadę luty-marzec-listopad. Dzieje się tak dlatego, że różnica pomiędzy pierwszymi dniami tych miesięcy jest liczbą podzielną przez 7.
9. Weźmy dowolne y rzeczywiste. Mamy $f(y) = f((y+3)-3) = f(3-(y+3)) = f(-y)$, czyli szukana funkcja musi być parzysta. Istnieje tylko jedna funkcja określona na liczbach rzeczywistych, która jest parzysta i nieparzysta – stale równa 0. Funkcja ta spełnia oczywiście warunki zadania.
10. Postawmy sześcian na tej ścianie. Jeśli $\alpha \le \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, przekrojem jest trójkąt równoramienny, którego podstawą jest przekątna podstawy sześcianu, a przeciwległy wierzchołek leży na jednej z pionowych krawędzi na wysokości $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Jego pole można więc wyliczyć np. ze wzoru Herona, bo długości ramion z twierdzenia Pitagorasa wynoszą $\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha\right)^2}$. Dla $\alpha \in (\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}>$ przekrojem jest równoramienny trapez o wysokości $\frac{1}{\sin\alpha}$. Jego dolna podstawa jest przekątną dolnej ściany sześcianu, a górna zrzutowana na tę ścianę da odcinek równoległy do dolnej leżący od niej w odległości ctgα. Z podobieństwa trójkątów powstałych w ten sposób na tej ścianie mamy: $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{ctg}\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, gdzie x jest długością górnej podstawy trapezu. Obliczamy zatem x, dzięki czemu można już znaleźć szukane pole.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1. Czy suma dwóch kolejnych liczb naturalnych i suma ich kwadratów to zawsze liczby względnie pierwsze?

2. Dla jakich p_1 i p_2 funkcja f określona na liczbach rzeczywistych wzorem $f(x) = |x - p_1| \cdot |x - p_2|$ ma maksimum lokalne?

3. Pomalowany sześcian rozcięto na pewną liczbę mniejszych kostek. Okazało się, że wśród nich jest tyle samo niepomalowanych, co z pomalowaną jedną ścianą, ale trzy razy więcej niż z pomalowanymi dwiema ścianami. Na ile części rozcięto ten sześcian?

4. A jest zbiorem dziesięciu liczb naturalnych. Udowodnij, że w A istnieją cztery liczby, których suma dzieli się przez 4.

5. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych *a, b, c* i *d* $\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{c^4} + \frac{c^4}{d^4} + \frac{d^4}{a^4} \geq 4$.

6. Na jaką największą liczbę części prosta może rozciąć wielokąt o 2018 wierzchołkach?

7. Brygadzie kosiarzy polecono skosić dwie łąki. Powierzchnia jednej z nich była dwa razy większa od drugiej. Pół dnia cała brygada kosiła większą łąkę, a w drugiej połowie tego dnia podzieliła się na dwie równe grupy. Pierwsza w dalszym ciągu kosiła większą łąkę i do końca dnia skosiła ją całkowicie, a druga grupa poszła kosić mniejszą łąkę, ale nie skosiła jej do końca. Reszta małej łąki została skoszona przez jednego kosiarza przez cały następny dzień pracy. Ilu kosiarzy liczyła ta brygada?

8. Jakie liczby trzycyfrowe mają tę własność, że po zakryciu środkowej cyfry wzrastają dziewięciokrotnie?

9. Wykaż, że jeśli a i b są takimi liczbami naturalnymi, że a^2+ab+b^2 dzieli się przez $a+b$, to dla każdego n naturalnego $a^{2n}+b^{2n}$ dzieli się przez $(a+b)^n$.

10. Sklejamy ścianami trójkątnymi czworościan foremny o krawędzi a i ostrosłup czworokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość a. Ile ścian, wierzchołków i krawędzi ma otrzymany wielościan?

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Tak. Suma kolejnych dwóch liczb naturalnych $s_1 = n+n+1 = 2n+1$. Suma ich kwadratów $s_2=2n^2+2n+1$. Ale $2s_2-(s_1)^2=1$. Gdyby istniał wspólny dzielnik obu sum, to dzieliłby on też liczbę $2s_2-(s_1)^2$. Tym dzielnikiem może więc być tylko 1.

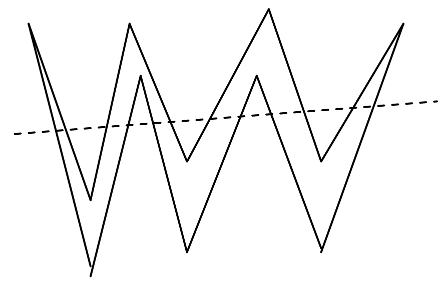
2. $f(x)=|(x-p_1)(x-p_2)|$, więc wykres f powstaje z pewnej paraboli przez odbicie jej części spod osi X nad nią. Maksimum lokalne wystąpi więc wtedy, gdy wierzchołek paraboli leżał pod osią, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $p_1 \neq p_2$.

3. Załóżmy, że sześcian podzielono na k^3 kostek. Wówczas kostek z pomalowaną jedną ścianą jest $6(k-2)^2$, a niepomalowanych $(k-2)^3$, skąd mamy od razu $k=8$. Wówczas kostek z dwiema pomalowanymi ściankami jest $12\cdot(k-2) = 72$, czyli rzeczywiście jest ich 3 razy mniej niż niepomalowanych (216).

4. Gdyby w A były cztery liczby dające przy dzieleniu przez 4 tę samą resztę, to teza oczywiście by zachodziła. Podobnie jeśli w A znaleźlibyśmy dwie liczby dające resztę 1 i dwie dające resztę 3 lub dwie podzielne przez 4 i dwie dające resztę 2. Gdyby nie zachodziła żadna z wymienionych sytuacji, mielibyśmy najwyżej cztery liczby dające przy dzieleniu przez 4 resztę 1 lub 3 i najwyżej cztery liczby dające resztę 0 lub 2, a ma ich być 10.

5. $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{c^2}\right)^2 \geq 0$, skąd $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{c^4} \geq \frac{2a^2}{c^2}$. Analogicznie $\frac{c^4}{d^4}+\frac{d^4}{a^4} \geq \frac{2c^2}{a^2}$ oraz $\frac{2a^2}{c^2}+\frac{2c^2}{a^2} = 2\left(\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 - 2\cdot 1\right)$, co wraz z poprzednimi nierównościami daje już tezę zadania.

6. Prosta rozetnie 2018-kąt na najwięcej części, jeśli wierzchołki umieścimy jak na rysunku. Prosta przecina wówczas każdy z boków, a rozcięcie daje 1010 części.



7. Niech b będzie liczebnością brygady. Na większą łąkę potrzeba było $\frac{b}{2}+\frac{b}{4}$ osobodni pracy, a na mniejszą – $\frac{b}{4}+1$. Mamy więc $\frac{b}{2}+\frac{b}{4}=2\left(\frac{b}{4}+1\right)$, skąd $b=8$.

8. Dowolna liczba trzycyfrowa to $100a+10b+c$. Mamy więc równanie: $100a+10b+c= 9(10a+c)$, czyli $10(a+b) - 8c=0$. Liczba $8c$ musi więc być pełną dziesiątką, skąd c to 5 lub 0. w pierwszym przypadku $a+b=4$, a drugi jest niemożliwy. Szukane liczby to: 135, 225, 315 i 405.

9. $a^2+ab+b^2=(a+b)\cdot a+b^2$, więc dane zadania implikują podzielność b^2 przez $a+b$. Analogicznie $(a+b)|a^2$, więc $(a+b)^n \mid (a^{2n}+b^{2n})$.

10. Do „piramidy” $ABCDS$ doklejamy „na zawiasach” trójkąty równoboczne ASS_A i BSS_B. Punkty S_A i S_B zlepią się wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na części wspólnej płaszczyzn zawierających ściany ASD i BSC. Pozostała „dziura” ma równa boki. Wielościan opisany w zadaniu ma więc dwie ściany w kształcie równoległoboków, jedną kwadratową i dwie trójkątne.