DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

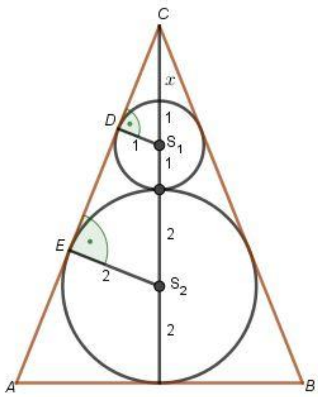
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

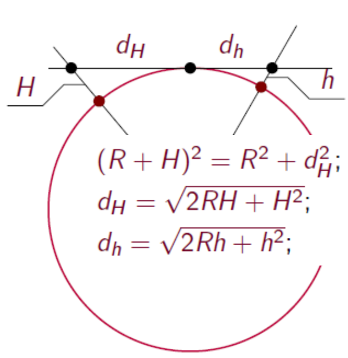
1. Jacek wypisał 2018 wyrazów ciągu arytmetycznego 2, 9, 16,..., a Agatka wypisała tyle samo wyrazów ciągu arytmetycznego 3, 7, 11,... . Ile liczb Jacka występuje w ciągu Agatki?
2. Czy istnieje trójkąt o bokach długości 2007^{2017}, 2008^{2018}, 2009^{2019}?
3. Okrąg wpisany w trójkąt równoramienny ma promień 2, a okrąg styczny do dwóch ramion tego trójkąta i do okręgu wpisanego w ten trójkąt ma promień 1. Ile wynosi pole tego trójkąta?
4. Czy suma sześcianów liczb od 1 do 2018 dzieli się przez 2019?
5. Kolega pana Mariana ma dwójkę dzieci urodzonych rok po roku, ale Marian nie pamięta, jakiej są płci. Kiedy przyszedł do kolegi w odwiedziny, drzwi otworzył mu chłopiec. Marian uznał, że prawdopodobieństwo tego, że drugim dzieckiem jest dziewczynka, wynosi ½ (bo mógłby to być równie dobrze chłopiec lub dziewczynka). Uzasadnij (lub obal) to stwierdzenie. Zakładamy, że chłopcy rodzą się tak samo często jak dziewczynki i płeć starszego dziecka nie ma wpływu na płeć młodszego.
6. Na skwerze zakwitły 3 krzewy w kolorach: białym, żółtym i czerwonym. Liczba wszystkich kwiatów była dwa razy większa od liczby kwiatów białych. Po tygodniu opadło 6 kwiatów i wtedy suma wszystkich kwiatów na krzewach była dwa razy większa od liczby kwiatów żółtych. Po kolejnym tygodniu opadło 8 kwiatów i wtedy w sumie na krzewach było dwa razy więcej wszystkich kwiatów niż kwiatów czerwonych, a liczby kwiatów poszczególnych kolorów wyrażały się kolejnymi liczbami naturalnymi. Ile kwiatów poszczególnych kolorów było na krzewach na początku?
7. Do dwóch jednakowych szklanek mama wlała po 200 ml coca-coli i pepsi-coli. Następnie przelała łyżkę coca-coli do szklanki z pepsi-colą, zawartość starannie wymieszała, a następnie łyżkę tej mieszanki przelała z powrotem do szklanki z coca-colą. Czego było wówczas więcej: coca-coli w pepsi-coli czy pepsi-coli w coca-coli?
8. Latarnia morska Rozewie ma światło na wysokości 83 m. Z jakiej odległości na morzu, przy dobrej widoczności, dostrzeże światło mający nieco ponad 2 m wzrostu marynarz stojący na pokładzie wycieczkowca na wysokości 18 m?
9. Ile cyfr ma najmniejsza wielokrotność liczby 99, która zapisuje się w systemie dwunastkowym tylko za pomocą cyfr 0 i 1?
10. Rozwiąż równanie $[{}^{n}/_{2}]-[{}^{n}/_{3}] = 50$ w zbiorze liczb naturalnych. Symbol $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jacek wypisał liczby postaci j_n = 2+4(n–1), a Agatka a_n= 3 +7(n–1). Pierwsza wspólna liczba to 23. Każda następna będzie o 28 większa od poprzedniej, bo NWW(4, 7) = 28. W obu ciągach jest 2018 liczb. Ostatnia liczba w ciągu Jacka to j_{2018} = 2+2017·7 = 14 121, a w ciągu Agatki a_{2018} = 3+2017·4 = 8071, czyli $a_{2018} < j_{2018}$. Szukamy zatem liczby wyrazów w ciągu arytmetycznym o różnicy 28, którego pierwszy wyraz wynosi w_1= 23, a ostatni $w_n \leq 8071$, czyli w_n = 23 + (n–1) ·28 ≤ 8071, stąd n = 288.



2. Jeśli a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, to z nierówności trójkąta zachodzi a+b > c, a+c > b i b+c > a. Przyjmując $a = 2007^{2017}$, $b = 2008^{2018}$, $c = 2009^{2019}$, otrzymujemy natomiast a+b < c, bowiem $2007^{2017} + 2008^{2018} < 2 \cdot 2008^{2018} < 2008 \cdot 2008^{2018} = 2008^{2019} < 2009^{2019}$. Stąd wynika, że trójkąt o podanych długościach boków nie istnieje.
3. Niech h oznacza wysokość trójkąta i h = 6 + x. Trójkąty prostokątne ES_2C i DS_1C są podobne (kk), zatem mają proporcjonalne boki i zachodzi $^2/_{4+x} = {}^1/_{1+x}$. Stąd x = 2, czyli h=8. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta DS_1C, obliczamy $|DC|=2\sqrt{2}$. Trójkąty DS_1C i AFC też są podobne (kk), zatem $|DC|:|DS_1| = |CF|:|AF|$, skąd $|AF| = 2\sqrt{2}$, czyli $|AB|= 4\sqrt{2}$. Pole trójkąta wynosi $^1/_2 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.
4. Na podstawie wzoru skróconego mnożenia $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$ wiemy, że suma sześcianów dwóch liczb dzieli się przez sumę tych liczb. W zadaniu liczba składników jest parzysta, więc można je połączyć w pary: $(1^3+2018^3) + (2^3+2017^3) + (3^3+2016^3) + ... + (1009^3+1010^3)$. Wyrażenie w każdym nawiasie dzieli się przez 2019, zatem ich suma również.
5. Niech b, z, c oznaczają odpowiednio liczby kwiatów białych, żółtych i czerwonych na początku, b_1, z_1, c_1 – liczby kwiatów po tygodniu, a b_2, z_2, c_2 – liczby kwiatów po dwóch tygodniach. Mamy: (*) $b+z+c = 2b$, (**) $b_1+z_1+c_1 = 2z_1 = 2b–6$, (***) $b_2+z_2+c_2 = 2c_2 = 2b–14$. Na koniec liczby kwiatów w poszczególnych kolorach wyrażały się kolejnymi liczbami naturalnymi n, n+1, n+2. Z (***) $c_2 = b_2+z_2$, więc $c_2 = n+2$ oraz $b_2+z_2+c_2 = 2c_2$, więc $n+(n+1)+(n+2) = 2(n+2)$, stąd n=1, zatem c_2=3. Dalej z (***) $2c_2 = 2b–14$, więc b=10. Z (**) $2z_1 = 2b–16$, czyli z_1=7. Z (*) $z+c$ = 10, a ponieważ z_1=7 i c_2=3, więc z≥7 i c≥3. Ostatecznie b=10, z=7, c=3. Za poprawną odpowiedź, z której nie wynika, że jest jedyna, przyznajemy 5 pkt.
6. Marian jest w błędzie, gdyż nie wiemy, czy chłopiec jest starszym, czy młodszym dzieckiem. W tej sytuacji prawdopodobieństwo, że drugim dzieckiem jest dziewczynka, wynosi 2/3. Mamy bowiem 4 możliwości rozkładu płci dzieci w rodzinie, uwzględniając kolejność narodzin: CC, CD, DC i DD. Wiemy, że przypadek DD nie zachodzi, a z pozostałych trzech dwa sprzyjają temu, że drugie z dzieci to dziewczynka, co daje prawdopodobieństwo $^2/_3$. Gdybyśmy wiedzieli, że starszym dzieckiem jest chłopiec, wówczas odrzucilibyśmy przypadki DD i DC, a z pozostałych dwóch jeden sprzyjałby temu, że drugie z dzieci to dziewczynka, co daje prawdopodobieństwo ½.
7. Rozpatrzmy dwie sytuacje: Gdyby pepsi coli w coca coli było mniej niż coca coli w pepsi coli, to w obu szklankach naraz byłoby więcej niż 250 ml coca coli, co jest sprzeczne z warunkami zadania. Gdyby zaś pepsi coli w coca coli było więcej niż coca coli w pepsi coli, to w obu szklankach byłoby mniej niż 250 ml coca coli, co też jest sprzeczne z warunkami zadania. Zatem coca coli w pepsi coli jest tyle samo co pepsi coli w coca coli. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odjąć 2 pkt.
8. Niech H – wysokość latarni, h – wysokość obserwatora, R – promień Ziemi. Gdyby obserwator stał na powierzchni Ziemi, maksymalna odległość, z jakiej dostrzegłby światło (tzn. promień horyzontu latarni), wynosiłaby d_H. Szukana w zadaniu odległość jest sumą promieni horyzontu latarni i obserwatora, czyli wynosi d_H+d_h. Przyjmując $R \approx 6366$ km (obliczone jako 40000/2π, ale uczeń może też przyjąć z pamięci wielkość 6300) i zauważając, że $R >> H$, co sprawia, że składniki H^2 i h^2 możemy pominąć, bo wnoszą wielkości rzędu co najwyżej trzeciej cyfry po przecinku), otrzymujemy $\sqrt{1056{,}76+0{,}0069}+\sqrt{254{,}64+0{,}004}$ $\approx$ $\sqrt{1057}+\sqrt{255}$ $\approx$ 32 + 16 = 48 km. Dla $R \approx 6300$ km wynik wynosi $\sqrt{1045}+\sqrt{252}$, co też daje 48 km.



9. 99=3^2·11 (czynniki względnie pierwsze). O podzielności przez 11 w systemie 12-tkowym decyduje suma cyfr, a o podzielności przez 9 – dwa końcowe zera. Liczba złożona z 11 jedynek i dwóch zer jest OK. i ma 13 cyfr.
10. Weźmy funkcję f określoną na liczbach naturalnych $f(n) = [^n/_2] – [^n/_3]$. Szukamy takich n, dla których $f(n)$ = 50. Rozważmy przypadki, ze względu na resztę z dzielenia n przez 6. Dla pewnego k naturalnego zachodzi:
a) n = 6k, wtedy $f(n) = f(6k) = [3k]–[2k] = 3k–2k = k$, zatem k=50 i n=300.
b) n = 6k+1, wtedy $f(n) = f(6k+1) = [3k+^1/_2]–[2k+^1/_3] = 3k–2k = k$, zatem k=50 i n=301.
c) n = 6k+2, wtedy $f(n) = f(6k+2) = [3k+1]–[2k+^2/_3] = 3k+1 – 2k = k+1$, zatem k=49 i n=296.

d) $n = 6k+3$, wtedy $f(n) = f(6k+3) = [3k+1+{}^1/_2]–[2k+1] = 3k+1 – (2k+1) = k$, zatem k=50 i n=303.
e) $n = 6k+4$, wtedy $f(n) = f(6k+4) = [3k+2]–[2k+1+{}^1/_3] = 3k+2 – (2k+1) = k+1$, zatem k=49 i n=298.
f) $n = 6k+5$, wtedy $f(n) = f(6k+5) = [3k+2+{}^1/_2]–[2k+1+{}^2/_3] = 3k+2 – (2k+1) = k+1$, zatem k=49 i n=299.
Wobec tego rozwiązaniem równania w liczbach naturalnych jest zbiór {296, 298, 299, 300, 301, 302}. Za poprawną odpowiedź bez wykazania, że inne liczby nie spełniają równania, przyznajemy 5 pkt. Za pominięcia jakiegoś pierwiastka przyznajemy 3 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

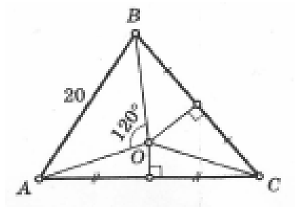
MECZ II

1. Ile jest liczb 10-cyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 5 lub suma cyfr dzieli się przez 3?

2. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna posiadająca 64 różne dzielniki?

3. Jaki jest obwód prostokąta, którego przekątna ma długość $\sqrt{50}$, a pole wynosi 9?

4. Oblicz długość OC z rysunku.



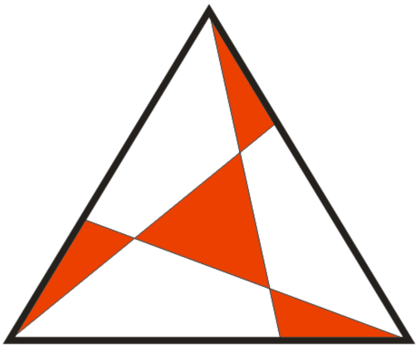
5. Czy liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest niewymierna?

6. Jaki jest najdłuższy ciąg arytmetyczny o różnicy 6, którego wszystkie wyrazy są pierwsze?

7. Rozwiąż w czwórkach liczb naturalnych układ równań.

$$\begin{array}{ll} K+K+N & =42 \\ L+M+N & =34 \\ K+M+N & =29 \\ L+N+L & =52 \end{array}$$

8. W pewnej wiejskiej szkole pracuje 12 nauczycieli: 7 kobiet i 5 mężczyzn. Na ile sposobów można z nich wyłonić 5-osobową delegację na spotkanie z ministrem, jeśli musi się w niej znaleźć przynajmniej dwóch mężczyzn i przynajmniej jedna kobieta?



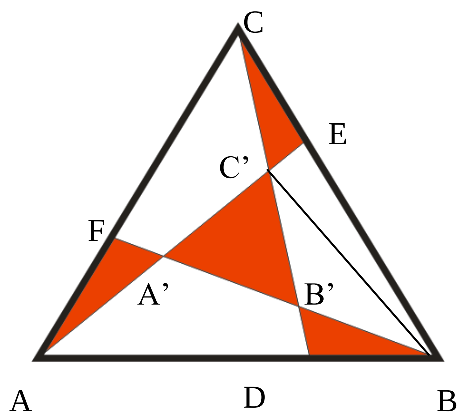
9. Matlandia ma flagę państwową w kształcie trójkąta równobocznego. Flaga jest biało-czerwona jak na rysunku (czerwony skserowany jest na szaro). Odcinki, które wychodzą z wierzchołka, dzielą przeciwległy bok na części w stosunku 1:2. Jaką część pola flagi stanowi kolor czerwony?

10. Udowodnij, że w trójkącie ostrokątnym o bokach długości a, b, c zachodzi

$$\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}+\sqrt{(b^2+c^2-a^2)}+\sqrt{(c^2+a^2-b^2)} \le a+b+c.$$

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jest 10 liczb 10-cyfrowych z iloczynem cyfr był równym 5 (cyfra 5 na jednym miejscu i jedynki na pozostałych). Co trzecia liczba 10-cyfrowa dzieli się przez 3, czyli ma sumę cyfr podzielną przez 3. Liczb 10-cyfrowych jest 9 999 999 999 – 999 999 999 = 9 000 000 000, wśród nich liczb podzielnych przez 3 jest 3 000 000 000. Te zbiory są rozłączne (za brak sprawdzenia tego odejmujemy 5 pkt), zatem odpowiedź to 3 000 000 010.
2. 64 dzielniki posiada np. 63. potęga dwójki. Są nimi: 1, 2, 2^2, 2^3, …, 2^{63}. Z potęg liczb pierwszych to jest najmniejsza liczba o 64 dzielnikach. Znacznie mniejsza jest liczba $2^{31}\cdot3$ i też ma 64 dzielniki. Dzielniki tej liczby są postaci $2^x\cdot3^y$, gdzie x wybieramy na 32 sposoby (od 0 do 31), a y na 2 sposoby (0 lub 1). Dzielników wychodzi $2\cdot32=64$. Ale $64 = 4\cdot16$, więc tyle dzielników będzie miała też liczba $2^{15}\cdot3^3$. $64 = 2\cdot2\cdot16$, więc trzeba też rozważyć liczbę $2^{15}\cdot3\cdot5$, a ta jest mniejsza niż poprzednia. $64 = 8\cdot8$, co prowadzi jeszcze mniejszej liczby $2^7\cdot3^7$. Trzeba jeszcze rozważyć $64 = 2\cdot4\cdot8$ i $64 = 2\cdot2\cdot2\cdot8$, które prowadzą do liczb $2^7\cdot3^3$ 5 i $2^7\cdot3\cdot5\cdot7$. Ta ostatnia jest z nich najmniejsza. Pozostają jednak przypadki $64 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot4$ i $64 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$, prowadzące do liczb $2^3\cdot3$ $5\cdot7\cdot11$ i $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17$, z których $2^3\cdot3$ $5\cdot7\cdot11$ jest mniejsza i jednocześnie najmniejsza ze wszystkich rozważanych. Uczeń powinien wykonać porównania przez szacowanie (porównywanie czynników), a nie wyliczanie wartości. W przeciwnym razie odejmujemy 2 pkt (przy poprawnej metodzie i wyniku).
3. Niech p jest połową obwodu prostokąta. Ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ mamy $50 + 18 = p^2$, czyli $p = \sqrt{68}$. Obwód prostokąta wynosi $2\sqrt{68}$.
4. Z rysunku wynika, że O jest punktem przecięcia symetralnych boków trójkąta, zatem OC jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie. Trójkąt AOB jest równoramienny, a po opuszczeniu w nim wysokości na bok AB otrzymujemy dwie połówki trójkąta równobocznego o wysokości 10, czyli o boku $|AO|$ $|CO| = {}^{20\sqrt{3}}/_{3}$.
5. Tak. Uzasadnienie nie wprost. Załóżmy, że jest to liczba wymierna w. Mamy $\sqrt{2} + \sqrt{3} = w-\sqrt{5}$. Te równość podnosimy stronami do kwadratu i otrzymujemy $5+2\sqrt{6} = w^2+5 - 2w\sqrt{5}$, co daje dalej $\sqrt{6}+w\sqrt{5} = w^2/2$. Lewa strona jest liczbą wymierną. Oznaczmy ją q i znowu podnieśmy obie strony do kwadratu. Otrzymamy $6+5w^2+2w\sqrt{30} = q^2$, skąd $\sqrt{30} = (q^2-6-5w^2)/2w$. Trzeba jeszcze pokazać, że lewa strona jest niewymierna, a prawa wymierna, co daje sprzeczność. Za stwierdzenia typu 'iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest niewymierny' odejmujemy 3 pkt (bo np. $\sqrt{2}\cdot0$ nie jest). Niewymierność $\sqrt{30}$ najłatwiej pokazać z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu $x^2 - 30 = 0$ ($\sqrt{30}$ nie jest żadnym z dzielników 30, bo żaden z tych dzielników nie daje wyniku 30 po podniesieniu do kwadratu).
6. Najdłuższym ciągiem jest 5, 11, 17, 23, 29 i jest to jedyny taki ciąg 5-elementowy. Załóżmy, że mamy 5 liczb różniących się kolejno o 6, czyli a , $a+6$, $a+12$, $a+18$, $a+24$, gdzie a to dowolna liczba naturalna. Pokażemy, że co najmniej jedna z powyższych liczb jest podzielna przez 5. Rozważmy reszty z dzielenia wyrazów ciągu przez 5: r, $r+1$, $r+2$, $r+3$, $r+4$ i $r\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Widać, że jedna z reszt musi być zerem, co oznacza, że 5 musi być wyrazem tego ciągu, a jeśli tak, to musi być wyrazem pierwszym.
7. Odejmując pierwsze równanie od ostatniego, otrzymujemy $L=K+5$. Odejmując trzecie od drugiego otrzymujemy to samo. Zatem równania nie są niezależne. Układ równań ma nieskończenie wiele pierwiastków całkowitych. Wszystkie otrzymamy, podstawiając za K dowolną liczbę całkowitą i wyliczając pozostałe jako: $L = K+5$, $N=42 - 2K$, $M = -13 - 3K$. Widać stąd, że jeśli K będzie liczbą naturalną, to M nie. Nie ma żadnej czwórki liczb naturalnych spełniających podane warunki.
8. Aby był spełniony warunek zadania, w delegacji musi być 2 lub 3 lub 4 mężczyzn. To są możliwości rozłączne, więc ich liczby dodajemy. Kobiety wybieramy niezależnie od mężczyzn, więc stosujemy regułę iloczynu. Możliwych delegacji jest $\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}+\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{2}+5\cdot7 = 10\cdot35+10\cdot21+35 = 350+210+35 = 595$.
9. Oznaczmy czerwone pole $CC'E = BB'D = AA'F$ jako a. Wówczas $BC'E = AB'D =$ A'CF to $2a$. Natomiast b niech oznacza pole $BB'C' = AB'A' = CA'C'$, a x - pole trójkąta $A'B'C'$. Pole trójkąta ADC jest 2 razy większe od BDC, co daje równość $8a+2b = 5a+2b+x$, skąd $x=3a$. Także pole trójkąta ADC' jest dwa razy większe od pola BDC', co daje równość $x+b+2a = 2a+2b$, skąd $x=b$, czyli $b=3a$. Całe pole trójkąta ABC to $21a$, a pole czerwone to $6a$, co stanowi ${}^2/_7$ całości.



10. Oznaczając $\sqrt{(a^2+b^2-c^2)} = u$, $\sqrt{(b^2+c^2-a^2)} = v$ oraz $\sqrt{(c^2+a^2-b^2)} = w$, i stosując nierówność między średnią arytmetyczną i kwadratową dwóch liczb tzn. $(x+y)/2 \le \sqrt{[(x^2+y^2)/2]}$, otrzymujemy $u+v+w = (u+v)/2+ (v+w)/2+ (w+u)/2 \le \sqrt{[(u^2+v^2)/2]}+\sqrt{[(v^2+w^2)/2]} + \sqrt{[(w^2+u^2)/2]} = \sqrt{(2b^2/2)} + \sqrt{(2c^2/2)} +\sqrt{(2a^2/2)} = a+b+c$.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1. Ile jest par liczb całkowitych (m, n), dla których prawdziwe jest zdanie: m-kąt foremny ma kąt zewnętrzny o mierze $n°$, a n-kąt foremny ma kąt zewnętrzny o mierze $m°$.

2. W pewnym trójkącie istnieje taki bok, którego długość jest średnią geometryczną długości dwóch pozostałych boków oraz taki, którego długość jest średnią arytmetyczną długości dwóch pozostałych boków. Jaki to typ trójkąta?

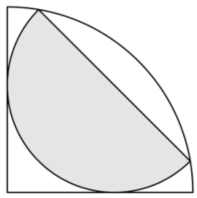
3. Suma kwadratów trzech kolejnych naturalnych liczb nieparzystych jest liczbą czterocyfrową o jednakowych cyfrach. Wyznacz wszystkie trójki takich liczb nieparzystych.

4. Rozwiąż równanie ${}^{x}/_{[x]} - {}^{1}/_{[x]} + {}^{[x]}/_{x} = 2$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a.

5. Wykaż, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt spodkowy (tzn. taki, którego wierzchołki są spodkami wysokości wyjściowego trójkąta).

6. Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ ma własność $f(f(f(x))) = 27x - 52$. Podaj wzór funkcji odwrotnej do f.

7. W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy. Suma długości promieni okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie jest równa 11. Oblicz obwód tego trójkąta.



8. Wykres funkcji $y = {}^{1}/_{x}$ odbito względem prostej $y = 1$, a następnie otrzymany obraz odbito względem prostej $y = -x$. Jakie równanie ma otrzymany w ten sposób wykres?

9. Półkole wpisano w ćwierćkole jak na rysunku. Jaką część ćwierćkola ono stanowi?

10. Na okręgu o średnicy $|AB| = 4$ wybrano punkt C tak, że łuk AB dzieli on w proporcji 2:1. Punkt P leży prostopadle nad O w odległości $2\sqrt{2}$ od płaszczyzny koła. Jaka jest odległość A od PC?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

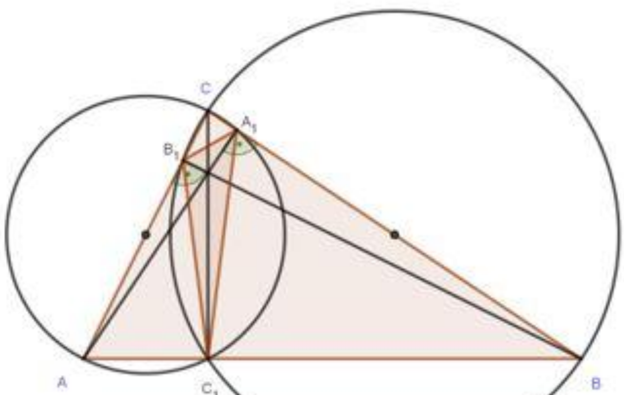
1. Kąt zewnętrzny wielokąta jest przyległy do kąta wewnętrznego. Jeśli kąt zewnętrzny ma $n°$, to wielokąt foremny ma $360/n$ boków. Stąd mamy $m=360/n$ i $n=360/m$. Zatem $m\cdot n = 360$, więc m jest dowolnym dzielnikiem 360 większym od 2 (za doliczenie 1 lub 2, które nie dadzą wielokąta odejmujemy 4 pkt). Jest ich 20 (3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120), jest więc 20 możliwych par $(m, 360/m)$.

2. Rozpatrzmy dwa przypadki: 1) długość jednego z boków równa się średniej geometrycznej i średniej arytmetycznej długości dwóch pozostałych boków, 2) długość jednego z boków równa się średniej geometrycznej długości dwóch pozostałych noków a długość innego boku średniej arytmetycznej długości pozostałych boków. Oznaczmy przez a, b, c długości boków danego trójkąta. W pierwszym przypadku niech $a=\sqrt{(bc)}$ oraz $a=(b+c)/2$. Stąd wynika, że $b = c$, a zatem $a = b = c$. W drugim przypadku niech $a=\sqrt{(bc)}$ oraz $b=(a+c)/2$. Wtedy $b=(\sqrt{(bc)}+c)/2$. Jeśli $b\leq c$, to ta wielkość jest $\geq (b+c)/2 \geq b$, a jeśli $b\geq c$, to ta wielkość jest $\leq (b+c)/2 \leq b$ (średnia wypada zawsze pomiędzy mniejszą a większą liczbą). W obu przypadkach w nierównościach równości zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy $b=c$, a zatem gdy $a=b=c$. Zatem warunki zadania spełnia jedynie trójkąt równoboczny.

3. Niech n-2, n, n+2 będą trzema kolejnymi naturalnymi liczbami nieparzystymi i niech $(n-2)^2+ n^2 + (n+2)^2$ będzie liczbą czterocyfrową o jednakowych cyfrach. Mamy wtedy $3n^2+ 8 = 1111 \cdot k$, gdzie k jest liczbą naturalną mniejszą niż 10. Liczba $1111 \cdot k - 8$ jest nieparzysta i podzielna przez 3. Warunek ten spełniony dla $k = 5$, wówczas $n = 43$. Jedynym rozwiązaniem jest więc trójka liczb 41, 43 i 45.

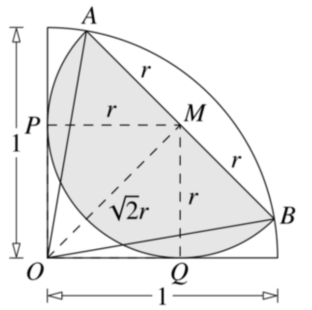
4. Dziedziną równania są takie liczby rzeczywiste, których część całkowita jest różna od zera. Po przekształceniu otrzymujemy równanie $(x - [x])^2 = [x]$, które jest sprzeczne, gdyż $x - [x] \in <0; 1)$.

5. Niech AA_1, BB_1, CC_1 będą wysokościami trójkąta ABC. Opisujemy okręgi na trójkątach ACC_1 i BCC_1. Kąty B_1C_1C i B_1BC są równe (jako wpisane oparte na tym samym łuku). Analogicznie równe są kąty CC_1A_1 i CAA_1. Ale trójkąty CAA_1 i CBB_1 są podobne (cecha kąt-kąt), więc kąty CAA_1 i CBB_1 są równe. A to na mocy przechodniości dowodzi równości kątów B_1C_1C i CC_1A_1, czyli tego, że wysokość CC_1 jest dwusieczną kąta $B_1C_1A_1$. To samo rozumowanie prowadzimy dla pozostałych kątów. Stąd punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta $A_1B_1C_1$, czyli środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



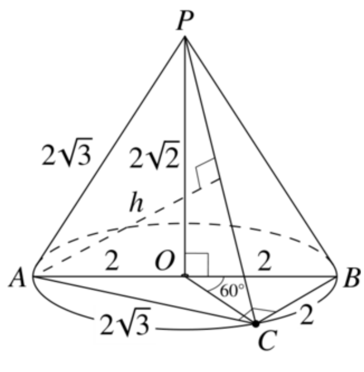
6. Mamy $f(f(f(x))) = a(a(ax+b)+b)+b = a^3x+a^2b+ab+b = a^3x+ b(a^2+a+1) = 27x - 52$. Z porównania współczynników mamy $a^3=27$, czyli $a=3$ i $13b = -52$, czyli $b=4$. Zatem funkcja f jest dana wzorem $f(x) = 3x+4$, stąd funkcja odwrotna ma wzór $g(x) = {}^{(x+4)}/_{3} = {}^{1}/_{3}\,x + {}^{4}/_{3}$ (skoro przepis f każe mnożyć przez 3 i odjąć 4, to przepis, który cofnie skutek działania f powinien dodać 4 i dzielić przez 3)

7. Niech O oznacza środek okręgu o promieniu R opisanego na trójkącie ABC, W – środek okręgu o promieniu r wpisanego w ten trójkąt, h – wysokość opuszczoną na podstawę AB o długości $2a$, P - spodek tej wysokości, M - punkt styczności okręgu wpisanego z ramieniem AC o długości $4a$. Z równoramienności P jest środkiem podstawy. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ACP mamy $h^2 + a^2 = (4a)^2$, skąd $h = a\sqrt{15}$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie WCM mamy $(h-r)^2 = r^2 + (3a)^2$, skąd $r = {}^{1}/_{5}\, a\sqrt{15}$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie APO mamy $R^2 = (h-R)^2 + a^2$, skąd $R = {}^{8}/_{15}a\sqrt{15}$. Ponieważ $r+R = 11 = {}^{11}/_{15}\, a\sqrt{15}$, dostajemy $a = \sqrt{15}$. Obwód trójkąta wynosi $10a = 10\sqrt{15}$.



8. Po odbiciu w pierwszej prostej otrzymujemy wykres o równaniu $y =1 + (1-{}^{1}/_{x}) = -{}^{1}/_{x}+2$. Odbicie w prostej $y = -x$ spowoduje zastąpienie y przez $-x$ oraz zastąpienie $-x$ przez y. Zatem równanie $y = -{}^{1}/_{x}+2$ przyjmie postać $-x = -{}^{1}/_{-y}+2$, czyli $-(x+2) = {}^{1}/_{y}$, czyli $y = -{}^{1}/_{x+2}$.

9. Niech O i M – środki ćwierćkola i półkola, AB – średnica półkola, P i Q – punkty styczności. Przyjmijmy $|OA|=1$ (podobieństwo zachowa stosunek pól). Styczna jest prostopadła do promienia, więc $OPMQ$ jest kwadratem i $|OM| = r\sqrt{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie OAM mamy $3r^2 = 1$. Pole ćwierćkola to $\pi/4$, a półkola $\pi/6$, co stanowi 2/3 całości.



10. Pokażemy, że trójkąt PAC jest równoboczny. Wówczas odległość A od PC to jego wysokość. P leży na osi symetrii koła, więc $PA=PC$ i z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie OPA mamy $PA = PC = 2\sqrt{3}$. Kąt półpełny AOB jest podzielony ramieniem OC w stosunku 2:1, więc kąt COB ma 60°, a równoramienny trójkąt COB jest równoboczny i BC=2. Kąt BCA jest prosty, jako wpisany oparty na średnicy. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ABC mamy $AC = 2\sqrt{3}$. Szukana odległość to 3.

Jaką największą wartość może przyjąć najmniejsza z liczb dodatnich x, $y + {}^1/_x$, ${}^1/_y$?

Oznaczmy przez s największą wartość, jaką przyjmuje najmniejsza z liczb x, $y+{}^1/_x$, ${}^1/_y$ dla pewnych wartości x, $y \in R_+$ (oczywiście wtedy także $s \in R_+$). Dla tych wartości x i y zachodzą warunki: $x \geq s$ (lub równoważnie ${}^1/_x \leq {}^1/_s$), $y+{}^1/_x \geq s$ oraz ${}^1/_y \geq s$ (lub równoważnie $y \leq {}^1/_s$). Stąd otrzymujemy nierówność podwójną $s \leq y+{}^1/_x \leq {}^2/_s$ (bo $y \leq {}^1/_s$ i ${}^1/_x \leq {}^1/_s$), z której wynika $s^2 \leq 2$, czyli $s \leq \sqrt{2}$. I ta wartość jest przez s osiągana, np. dla $x=\sqrt{2}$ i $y = {}^{\sqrt{2}}/_2$.