DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1) Ania, Basia, Czesia, Daria i Ewa wybierają się autobusem nad jezioro. Stanęły w kolejce do kierowcy po bilet. Daria stała w kolejce przed Basią, ale za Ewą. Ania i Ewa nie stały obok siebie. Czesia nie stała obok Ewy, ani Darii, ani obok Ani. W jakiej kolejności dziewczynki ustawiły się w kolejce?

2) 31 grudnia 1997 roku była środa. Ile śród było w 1997 roku?

3) Dwie lodówki i trzy pralki kosztują 7250 zł. Pięć takich samych lodówek i trzy pralki kosztują 9800 zł. Ile kosztuje pralka, a ile lodówka?

4) Dane są dwie różne cyfry, z których żadna nie jest zerem. Pokaż, że suma wszystkich liczb dwucyfrowych, jakie można zapisać za pomocą tych cyfr, jest podzielna przez 11.

5) Liczba 145541 jest palindromem, bo nie zmienia wartości czytana w przód i wspak. Ma też tę szczególną własność, że wybrane z niej kolejne liczby dwucyfrowe (14, 45, 55, 54 i 41) są różne. Jaka jest największa liczba palindromiczna zapisana cyframi 1, 2 i 3 o tej samej własności?

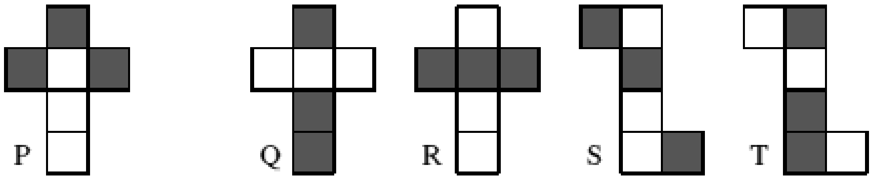
6) Mateusz ma dwie młodsze siostry. Iloczyn lat trojga dzieci jest równy 396, a suma ich lat jest równa 23. Ile lat ma Mateusz?

7) Janek narysował cztery grupy prostych równoległych (ale żadna prosta z jednej grupy nie była równoległa do prostej z innej grupy) zawierające odpowiednio 20, 30, 40 i 50 prostych. Ile punktów przecięcia jest na jego rysunku?

8) Ile liczb spełnia równanie $(2x+6)(x^2+9)(x^3-1)=0$?

9) Wiadomo, że $^1/_a = a + {}^1/_b = b + {}^1/_c = 3$. Jaka jest wartość iloczynu abc?

10) Rysunek przedstawia pięć siatek sześcianu wykonanych z kartonu (ściany mają ten sam kolor po obu stronach papieru). Z siatki P złożono sześcian. Która z pozostałych przedstawia siatkę identycznego sześcianu?



EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Skoro Daria stała w kolejce przed Basią, ale za Ewą, to mamy układ _ _ E _ _ D _ _ B _ _. W puste miejsca trzeba wstawić Anię i Czesię. Wiadomo, że nie stały one obok siebie, więc mamy układ _ E _ D _ B _. Wiadomo, że Czesia nie stała obok Ewy ani Darii, więc jedyny możliwy układ to _ E _ D _ B C. Pozostało ustawienie Ani. Nie może ona stać koło Ewy, mamy zatem ostateczny układ E D A B C.

2. 1997 nie był rokiem przestępnym, więc miał 365 dni = $52 \cdot 7+1$, tzn. 52 tygodnie i 1 dzień (ostatni – środę). Zatem w roku były 53 środy. Za bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt.

3. Zapisując treść symbolicznie, mamy $2L + 3P = 7250$ oraz $5L+3P = 9800$. Różnica tych liczb 2550 to koszt trzech lodówek. Stąd L=850 i dalej P = 1850. Za podanie odpowiedzi ze sprawdzeniem bez rozumowania, z którego wynika, że to jedyna możliwość, przyznajemy 3 pkt.

4. Niech cyfry z zadania to A i B. Za ich pomocą można zapisać cztery liczby dwucyfrowe: $\underline{AA} = 10A+A$, $\underline{AB} = 10A+B$, $\underline{BA} = 10B+A$ i $\underline{BB} = 10B+B$. Ich suma jest równa $22A + 22B = 22(A+B)$, co dzieli się przez 11 bez reszty.

5. Z cyfr 1, 2 i 3 możemy utworzyć 9 różnych liczb dwucyfrowych (11, 22, 33, 12, 21, 13, 31, 23, 32) – jedną cyfrę z trzech wybieramy na 3 sposoby i dwie cyfry z trzech na trzy sposoby (to samo, co odrzucić jedną), ale możemy jeszcze zmieniać kolejność (czyli $3+2 \cdot 3$) za brak uzasadnienia, że to wszystkie możliwości odemujemy1 pkt. Teraz konstruujemy jak największą liczbę palidromiczną, spełniająca warunki zadania. Najlepiej gdyby zawierała wszystkie 9 liczb dwucyfrowych. Aby liczba była największa, zaczynamy od 3. Kolejne cyfry nie mogą się powtarzać (poza „środkiem” liczby), bo ta sama dwucyfrowa liczba wystąpiłaby dwukrotnie w symetrycznym położeniu. Zatem początek musi być taki 32…23. Trzecią cyfrą nie może być 3, bo powtórzą się liczby 32 i 23, zatem musi być 321…123. Teraz znowu można wpisać największą możliwa cyfrę, czyli 3. Dostajemy liczbę 3213…3123. Liczba 32133123 wyczerpuje już 8 z 9 możliwych liczb dwucyfrowych. Zostaje niewykorzystana liczba 11, jednak może ona stać jedynie w środku, ale wpisanie jej tam powoduje powtórzenia. Dlatego otrzymana do tej pory liczba jest największa z możliwych. Za podanie odpowiedzi bez uzasadnienia przyznajemy 3 pkt.

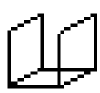
6. Rozkładamy liczbę 396 na czynniki pierwsze, co daje $11 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$. Jedno z dzieci ma 11 lat (bo po połączeniu 11 z innym czynnikiem suma lat będzie większa niż 23). Z pozostałych czterech czynników musimy utworzyć dwa. Jeśli połączymy trzy czynniki, otrzymamy $3 \cdot 3 \cdot 2$ (ale 18+11>23), albo $2 \cdot 2 \cdot 3$ (ale 12+11+3 > 23). Jeśli połączymy po dwa czynniki, otrzymamy $3 \cdot 3$ i $2 \cdot 2$ (ale 9+4+11>23) lub $3 \cdot 2$ i $3 \cdot 2$ i wtedy 6+6+11=23. Zatem Mateusz ma 11 lat. Za rozpatrywanie większej liczby przypadków odejmujemy 3 pkt. Za brak systematycznej reguły w sprawdzaniu odejmujemy 1 pkt. Za niesprawdzenie jakiejś możliwości (i dobrej odpowiedzi) przyznajemy maksymalnie 4 pkt.

7. Kiedy p równoległych przecina q równoległych, każda linia z pierwszej grupy przecina każdą z drugiej i powstaje $p \cdot q$ punktów przecięcia. Mamy 4 grupy linii równoległych, czyli 6 par nierównoległych kierunków. Liczba przecięć jest więc sumą sześciu składników $20 \cdot 30 + 20 \cdot 40 + 20 \cdot 50+30 \cdot 40+30 \cdot 50+40 \cdot 50 = 600+800+1000+1200+1500+2000 = 7100$.

8. Iloczyn trzech czynników jest zerem, wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z nich jest zerem. Pierwszy nawias daje wartość zero dla x=-3, drugi ma zawsze wartość dodatnią, a trzeci zeruje się dla x=1. Zatem równanie spełniają dwie liczby. Za podanie odpowiedzi ze sprawdzeniem bez rozumowania, z którego wynika, że to jedyna możliwość, przyznajemy 2 pkt.

9. Z treści wiemy, że $^1/_a = 3$, skąd $a = {}^1/_3$. Dalej $^1/_3+{}^1/_b = 3={}^9/_3$, skąd $^1/_b = {}^8/_3$, czyli $b={}^3/_8$. I dalej $^3/_8+{}^1/c = 3={}^{24}/_8$, skąd $^1/_c = {}^{21}/_8$, a wtedy $c={}^8/_{21}$. Szukany iloczyn to $^1/_3 \cdot {}^3/_8 \cdot {}^8/_{21} = {}^1/_{21}$.

10. Każda siatka z rysunku ma trzy ściany białe i trzy szare. W takim wypadku są tylko dwie możliwości: albo ściany szare spotykają się w jednym wierzchołku, albo nie (wtedy sześcian składa się z dwóch splecionych jednokolorowych figur przypominających U – patrz rysunek). Żadna siatka z rysunku nie daje sześcianu, w którego wierzchołku schodzą się 3 szare kwadraty, dlatego wszystkie te sześciany są jednakowe.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1. Piszemy daty w postaci dd-mm-rrrr, ale bez kresek, np. 01092010 oznacza 1 września 2010. Data 1 lutego 2010 jest liczbowym palindromem (tzn. czyta się tak samo w przód i wstecz). Jaka była po niej następna data palindromiczna?

2. Suma trzech liczb wynosi 200. Jakie to liczby, jeśli pierwsza z nich jest o 3 mniejsza od drugiej, a druga jest o 11 mniejsza od trzeciej?

3. Pokaż, że suma czterech kolejnych liczb naturalnych nie może być liczbą pierwszą.

4. Jasiek powiedział: Kiedy miałem 3 lata, mój ojciec był o 5 lat starszy od mojej mamy. Gdy miałem 9 lat moja mama miała 37 lat. Przed dwoma laty mój ojciec obchodził jubileusz 60-lecia. Ile lat ma Jasiek?

5. Po tym jak Staszek wydał $^1/_5$ kieszonkowego i jeszcze ¼ tego, co mu z niego pozostało, miał już tylko 15 zł. Ile kieszonkowego dostał?

6. Ile liczb od 1 do 2014 jest podzielnych jednocześnie przez 20 i 14?

7. Ile razy od godziny 12^{00} do 24^{00} wskazówka minutowa i godzinowa tworzą kąt 30^{o}?

8. Przekątne równoległoboku o obwodzie 40 cm dzielą go na cztery trójkąty. Różnica obwodów dwóch z tych trójkątów wynosi 5 cm. Oblicz długości boków równoległoboku.

9. Ile liczb spełnia równanie $(x^3+8)(x^2-16)(x^2+1)=0$?

10. Liczby dodatnie *a*, *b*, *c*, *d* są takie, że $ab = 2$, $bc = 3$, $cd = 4$ i $de = 5$. Jaką wartość liczbową ma ułamek $^e/_a$?

EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Daty są złożone z 8 cyfr, zatem podanie samego roku wyznacza już jednoznacznie datę palindromiczną. Po roku 2010 musimy więc przejść do kolejnego roku 2011, który wyznacza datę 11-02-2011.

2. Oznaczając przez T trzecią liczbę, mamy $T+(T–11)+(T–11–3) = 3T–25 = 200$. Stąd $T = 75$, a pozostałe liczby to 64 i 61. Za podanie odpowiedzi ze sprawdzeniem bez rozumowania, z którego wynika, że to jedyna możliwość, przyznajemy 3 pkt.

3. Suma liczby nieparzystej i parzystej jest nieparzysta, a suma dwóch liczb parzystych jest parzysta. Liczby nieparzyste i parzyste ułożone są na przemian, więc każde dwie kolejne liczby różnią się parzystością. Zatem suma pierwszych dwóch i suma ostatnich dwóch z czterech kolejnych liczb jest parzysta, a więc suma wszystkich czterech też. Tylko 2 jest parzystą liczbą pierwsza, ale suma 4 kolejnych liczb naturalnych jest zawsze większa od 2 (najmniejsza to 1+2+3+4=10).

4. Rozwiązanie ilustruje tabela.

J	M	T
3	X	X+5
9	37	37+5
		60
29	57	62

+20

5. Niech Staszek miał x zł kieszonkowego. Po wydaniu $^{1}/_{5}x$ zostało mu $^{4}/_{5}x$, a po wydaniu ¼ z tego, zostało mu ¾ z $^{4}/_{5}x$, czyli $^{12}/_{20}x$ i to wynosi 15 zł. Zatem $x = 25$ zł.

6. Liczba dzieli się jednocześnie przez 20 i 14 wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez 140 (ich NWW). Co 140-sta liczba naturalna dzieli się przez 140, czyli takich liczb jest [2014/140] = 14. Za zliczanie „na piechotę" odejmujemy 3 pkt.

7. Zazwyczaj dzieje się tak 2 razy w ciągu każdej godziny: raz kiedy wskazówka minutowa jest o 30° (czyli 5 minut) przed godzinową i raz gdy jest 30° za godzinową. Dla 12 godzin daje to 24 możliwości, ale jedna z nich wypada około godziny 11^{55} i jedna około godziny 00^{05}, więc są one poza rozpatrywanym w zadaniu przedziałem czasowym. Ostatecznie zostają 22 momenty. Za odpowiedź 24 przyznajemy 3 pkt.

8. Skoro obwód wynosi 40 cm, to suma dwóch sąsiednich boków 20 cm. Przekątne w równoległoboku połowią się, więc różnica obwodów trójkątów musi być różnicą długości boków równoległoboku. Skoro jeden jest dłuższy od drugiego o 5, to $x+x+5=20$, skąd $2x=15$. Zatem jeden bok ma długość 7,5cm, a drugi 12,5cm.

9. Iloczyn trzech czynników jest zerem, wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z nich jest zerem. Pierwszy nawias daje wartość zero dla x=2, drugi zeruje się dla x=4 albo x=-4, a trzeci ma zawsze wartość dodatnią. Pominięcie któregoś pierwiastka powoduje, że zadanie jest nierozwiązane. Zatem równanie spełniają trzy liczby. Za podanie odpowiedzi ze sprawdzeniem bez rozumowania, z którego wynika, że to jedyna możliwość, przyznajemy 3 pkt.

10. Z czwartej równości mamy $d = {}^{5}/_{e}$. Wtedy z trzeciej równości mamy $c\cdot{}^{5}/_{e} = 4$, czyli $c = {}^{4e}/_{5}$. Wtedy z drugiej równości mamy $b\cdot{}^{4e}/_{5} = 3$, czyli $b = {}^{15}/_{4e}$. Ostatecznie z pierwszej równości mamy $a\cdot{}^{15}/_{4e} = 2$, czyli $^{a}/_{e} = {}^{8}/_{15}$.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1. Ojciec jest dziś 3 razy starszy od syna, ale za 11 lat będzie starszy już tylko dwukrotnie. Ile lat ma obecnie syn?

2. Na początku marca cenę nart obniżono o $^1/_3$, a w kwietniu – jeszcze o 40 zł. Wtedy Jacek kupił je za 590 zł. Ile kosztowały te narty w lutym?

3. Jakie pary liczb naturalnych (dopuszczamy także liczbę zero) mają sumę równą 150, a ich największy wspólny dzielnik wynosi 15?

4. Ile liczb spełnia równanie $\dfrac{x-4}{x-4}$ = 0?

5. W dodawaniu nie występuje cyfra zero, a każda litera zastępuje inną cyfrę. Ile wynosi $T+H+I+S$?

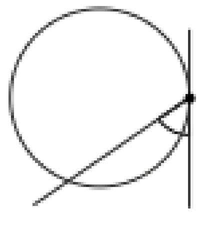
$$\begin{array}{r} THIS \\ +\quad IS \\ \hline 2014 \end{array}$$

6. Jaka jest najmniejsza liczba całkowita dodatnia, która dzieli się przez 13, ma sumę cyfr równą 13 i której dwie ostatnie cyfry tworzą liczbą 13?

7. Stosunek miar kątów pewnego trójkąta wynosi 1:2:3. Oblicz miary tych kątów.

8. Beata napisała 10 kolejnych liczb całkowitych, zaczynając od pewnej liczby dwucyfrowej. Okazało się, że żadna z tych liczb nie ma sumy cyfr podzielnej przez 7. Jaką najmniejszą liczbę mogła zapisać Beata?

9. Wiadomo, że $\dfrac{3x+y}{x-3y}=-1$. Jaka jest wartość wyrażenia $\dfrac{x+3y}{3x-y}$?



10. Kąt dopisany do okręgu to kąt o wierzchołku na okręgu, którego ramionami są styczna do okręgu w wierzchołku kąta i dowolna cięciwa (patrz rysunek). Udowodnij twierdzenie o kącie dopisanym, które mówi, że kąt dopisany do okręgu jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczając przez O i S obecny wiek ojca i syna odpowiednio, mamy $O=3S$, ale także $O+11 = 2(S+11)$, czyli $O = 2S+11 = 3S$. Stąd $S=11$. Obliczanie wieku ojca jest zbędne (można za to odjąć 1 pkt). Za podanie odpowiedzi ze sprawdzeniem bez rozumowania, z którego wynika, że to jedyna możliwość, przyznajemy 3 pkt.

2. Oznaczmy przez C cenę nart w lutym. Z treści zadania wiemy, że $^{2}/_{3}C–40 = 590$, czyli $^{2}/_{3}C = 630$, zatem $^{1}/_{3}C = 315$. Stąd $C = 945$ zł. Za podanie odpowiedzi ze sprawdzeniem bez rozumowania, z którego wynika, że to jedyna możliwość, przyznajemy 3 pkt.

3. Każda z szukanych liczb w parze musi być wielokrotnością 15 i nie może być większa niż 150. Mamy zatem możliwe pary 0+150, 15+135, 30+120, 45+105, 60+90, 75+75 i dalej pary różnią się już tylko kolejnością dodawania (można je rozpatrywać jako inne, ale nie wymagamy tego). Jednak tylko w przypadku dwóch par ich NWD wynosi 15. Można też uznać, ze takich par jest cztery, uwzględniając kolejność: (15, 135), (45, 105), (105, 45) i (135, 15).

4. Iloraz jest zerem, wtedy i tylko wtedy, gdy licznik jest zerem, to znaczy gdy $x=4$. Jednak liczba 4 nie spełnia równania, gdyż po wstawieniu jej w miejsce x, otrzymujemy dzielenie przez 0, którego nie da się wykonać Zatem równania nie spełnia żadna liczba. Za podanie odpowiedzi bez uzasadnienia przyznajemy 2 pkt.

5. S musi być równe 2 lub 7 (bo $2S$ kończy się na 4). W rzędzie dziesiątek wyniku stoi nieparzyste 1, więc musiało nastąpić przeniesienie (bo $I+I$ dałoby cyfrę parzystą). Zatem $S=7$. Skoro I nie jest zerem, musi być równe 5, aby dało 1 w rzędzie dziesiątek wyniku. Mamy zatem znowu przeniesienie do rzędu setek. Stąd $H=9$ i $T=1$. Zatem szukana suma to 1+9+5+7 = 22.

6. Nie może być to liczba jedno- ani dwucyfrowa (za brak uzasadnienia odejmujemy 1 pkt). Nie może to być liczba trzycyfrowa, bo musiałoby to być 913, a ta liczba nie dzieli się przez 13. Nie może być to liczba czterocyfrowa, bo suma dwóch początkowych cyfr musiałaby być 9 (kolejna możliwość to 22, ale dwie cyfry dadzą góra 18), a liczby 9000, 8100, 1800, 7200, 2700, 6300, 3600, 5400 i 4500 nie są podzielne przez 13 (za pominięcie choćby jednego przypadku odejmujemy 4 pkt). Wśród liczb pięciocyfrowych najmniejsza o sumie początkowych trzech cyfr 9 to 10800, ale ta liczba nie dzieli się przez 13. Kolejna to 11700, a ponieważ $117 = 9 \cdot 13$, liczba 11700 jest podzielna przez 13. Szukaną liczbą jest więc 11713.

7. Oznaczmy miarę najmniejszego kąta przez x. Wtedy pozostałe mają miary $2x$ i $3x$. Suma kątów tego trójkąta wynosi $6x$ i jest równa 180°. Zatem $x = 30°$, $2x = 60°$, $3x = 90°$.

8. W dziesiątce kolejnych liczb dwucyfrowych zawsze znajduje się taka, której suma cyfr jest podzielna przez 7 (za brak uzasadnienia odejmujemy 4 pkt – wystarczy sprawdzić przypadki, gdy wielokrotności 10 występują w ciągu na 4 lub 5 miejscu, bo w pozostałych przypadkach sumy cyfr dają kolejne 7 liczb, a wśród nich zawsze jest wielokrotność 7). Zatem niektóre liczby Beaty musiały być trzycyfrowe. Ostatnią liczbą dwucyfrową o sumie cyfr podzielnej przez 7 jest 95. Zatem najmniejsza liczba, od której mógł zacząć się ciąg Beaty to 96. Rzeczywiście liczby od 96 do 105 mają sumy cyfr niepodzielne przez 7.

9. Z pierwszej równości widać, że licznik i mianownik to liczby przeciwne, zatem $3x+y = -x+3y$. Stąd $4x=2y$, tzn. $y=2x$. Podstawiając do drugiej równości, otrzymamy $^{7x}/_{x} = 7$. Za bardziej skomplikowane, ale poprawne rachunki, odejmujemy 2 pkt.

10. Zachodzi $\alpha+2x = 180°$ (suma kątów trójkąta) oraz $\beta+x = 90°$ (prostopadłość promienia do stycznej). Stąd $\alpha=2\beta$.