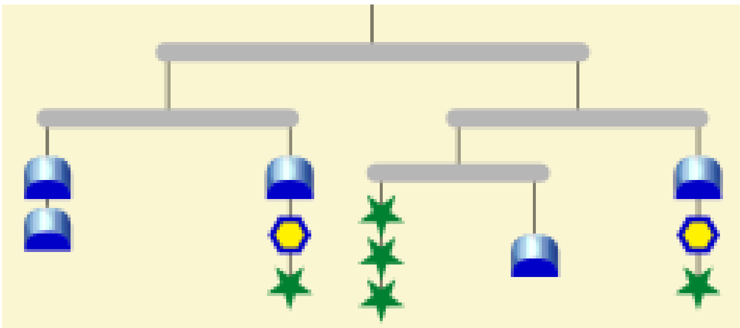
DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1) Całkowita masa odważników na tej wadze wynosi 48. Ile waży każdy z nich?



2) Podczas gry w pokera podsłuchano rozmowę czterech królów:
król Kier: Schowałem jokery.
król Trefl: Król Kier kłamie.
król Karo: Król Trefl kłamie.
król Pik: Król Karo kłamie.
Ilu królów skłamało?

3) Karol wybrał dwie liczby całkowite dodatnie i ustawił je na pierwszym i drugim miejscu ciągu. Każdy następny wyraz tego ciągu tworzył jako sumę dwóch poprzednich liczb. Na szóstym miejscu znalazła się liczba 2016. Ile najwięcej mogła wynosić pierwsza liczba?

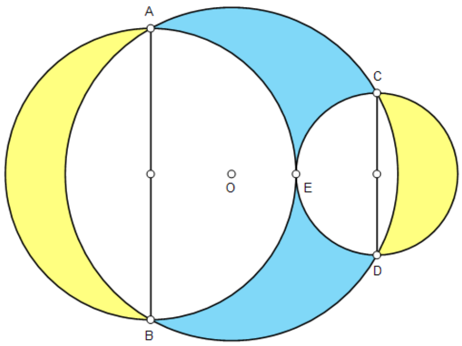
4) Agata ma pudło kartoników z cyframi 1, 2 i 3. Układa z nich liczby wielocyfrowe w taki sposób, aby wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone z kolejnych cyfr tej liczby wielocyfrowej były różne. Ile cyfr ma największa liczba, którą może ułożyć Agata?

5) Dwóm ogrodnikom skoszenie ogrodu zajmuje 8 dni. Jeden z nich jest leniwy, a drugi pracowity. Kiedy leniwy nie pracuje, pracowity kosi ogród w ciągu 12 dni. Ile czasu potrzebuje na skoszenie ogrodu leniwy?

6) Pewna liczba przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, a przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Jacek twierdzi, że wszystkie takie liczby przy dzieleniu przez 12 dają tę samą resztę, a jego siostra Agatka – że mogą dawać różne reszty. Kto ma rację?

7) Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, liczby n^{113} i n^{217} mają jednakowe cyfry jedności.

8) Która figura f czy g ma większe pole? f jest sumą dwóch zacieniowanych księżyców, a g jest sumą środkowej zacieniowanej części.



9) Którą potęgą czternastu jest $\sqrt{2016}+\sqrt{56}$?

10) Sześcian o krawędzi długości 3 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z płaszczyzną podstawy kąt 45°. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy masy odważników: C – cylinder, S – sześciokąt, G – gwiazdka. Z najniższego poziomu wagi widzimy, że $C=3G$. Z lewego ramienia wynika, że $3C = C+S+G$, zatem $6G=4G+S$, czyli $S=2G$. Stąd masa wszystkich odważników to $24G = 48$, czyli $G=2$, $S=4$ i $C=6$.

2. Niezależnie od tego, czy król Kier mówi prawdę, czy kłamie, zawsze dwóch królów kłamie. Aby to zauważyć, należy rozpatrzyć dwa przypadki: w pierwszym król Kier kłamie, a w drugim – mówi prawdę. Za nierozważenie wszystkich możliwości przyznajemy 3 pkt.

3. Niech Karol wybrał na początku liczby A i B. Na trzecim miejscu stała liczba $A+B$, na czwartym $A+2B$, na piątym $2A+3B$, na szóstym $3A+5B$. Jeśli A ma być największe, B musi być najmniejsze możliwe, czyli np. równe 1. Wtedy $3A=2011$, ale to nie dzieli się przez 3. Jeśli $B=2$, to $3A = 2006$ i też nie dzieli się przez 3, ale jeśli $B=3$, to $3A=2001$, więc największe możliwe $A=667$.

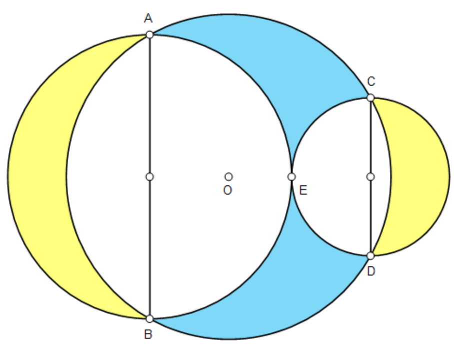
4. Największa możliwa liczba to 3323122113. Ma 10 cyfr. Zaczynamy od 3 i na każdym następnym miejscu wpisujemy największą możliwą cyfrę, która nie powoduje powtórzenia liczy dwucyfrowej, ani nie kończy procedury wypisywania. Dochodzimy do 3323 następną cyfrą nie może być ani 3, ani 2, bo mamy powtórzenie, więc wpisujemy 1. Teraz najwyższą możliwą cyfrą jest 3, ale to urywa procedurę na 332313, bo po 3 wykorzystaliśmy już wszystkie cyfry. Zatem wstawiamy 2, bo to pozwala kontynuować wypisywanie. Podobnie w miejscu 33231221 wpisanie 3 lub 2 zatrzyma procedurę (bo potem nie da się już nic wpisać) natomiast wpisanie 1 pozwoli dopisać jedną cyfrę więcej. Dalej już nic nie można dopisać, bo po każdej cyfrze wystąpiła już każda inna. Za podanie odpowiedzi bez uzasadnienia jej maksymalności przyznajemy 5 pkt. Za odpowiedź 9-cyfrową przyznajemy 2 pkt.

5. Pracowity w ciągu dnia kosi 1/12 ogrodu, zatem w ciągu 8 dni skosi 8/12 ogrodu, a leniwy w tym czasie skosi resztę równą 4/12 ogrodu. **I sposób**. Widać, że pracowity kosi 2 razy szybciej, więc leniwemu skoszenie ogrodu zajmie 24 dni. **II sposób**. Skoro w 8 dni leniwy kosi 4/12, to aby skosił cały ogród (czyli 12/12), potrzebuje 3 razy tyle czasu, więc zajmie mu to $3\cdot 8=24$ dni. Za poprawne lecz bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt.

6. Rację ma Jacek. Niech $A = 3x+2$ i $A = 4y+1$. Wtedy $4A = 12x+8$ i $3A = 12y+3$. Ale $A = 4A–3A = 12x–12y+5 = 12(x–y)+5$. Stąd widać, że szukana reszta zawsze wynosi 5. Za argumentację na wielu przykładach przyznajemy 0 pkt.

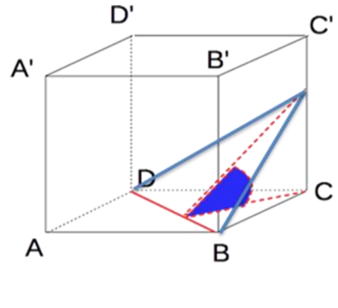
7. Cyfra jedności iloczynu zależy tylko od cyfry jedności czynników, co wynika np. z algorytmu mnożenie pisemnego (za brak tej uwagi odejmujemy 2 pkt). Jeśli liczba kończy się na 1, 5, 6 lub 0, ostatnie cyfry jej potęg są zawsze jednakowe. Jeśli liczba kończy się na 4 lub 9, parzyste i nieparzyste potęgi kończą się tą samą cyfrą (dla czwórki na 4 lub 6, a dla dziewiątki na 9 lub1). Jeśli liczba kończy się jedna z pozostałych cyfr tzn. 2, 3, 7 lub 8, cyfra jedności w kolejnych potęgach zmienia się okresowo co 4. Potęgi n^{113} i n^{217} są odległe o wielokrotność czwórki, więc mają te same ostatnie cyfry.

8. Niech x będzie promieniem środkowego okręgu, a S_1 i S_2 oznaczają środki zewnętrznych okręgów. Punkt O leży na prostej S_1S_2 (na symetralnej każdej cięciwy – za założenie tego bez uzasadnienia odejmujemy 2 pkt.). Niech $R=S_1A$ i $r=S_2C$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów OS_1A i OS_2C mamy $x^2=R^2+OS_1^2$ oraz $x^2=r^2+OS_2^2$. Zatem $OS_2^2–OS_1^2 = x^2–r^2 – x^2+R^2 = R^2–r^2 = (R–r)(R+r)$. Zachodzi też $OS_2^2 – OS_1^2 = (OS_2–OS_1)(OS_2+OS_1)$ przy czym $OS_2+OS_1 = R+r$ (warunek zewnętrznej styczności okręgów). Z porównania tych warunków dostajemy $OS_2–OS_1 = R–r$, co przy $OS_2+OS_1 = R+r$ daje $OS_2=R$ i $OS_1 = r$ (czyli $x^2=R^2+r^2$). Za założenie tej równości bez należytego uzasadnienia odejmujemy 5 pkt. Oznaczmy teraz pola soczewek dopełniających półksiężyce do półokręgów przez P_1 i P_2. Pole $g = \pi x^2 – \pi R^2/2 – P_1 – \pi r^2/2 – P_2 = \pi R^2/2+\pi r^2/2–P_1–P_2$. Natomiast pole $f = \pi R^2/2–P_1 + \pi r^2/2–P_2$. Zatem pola figur f i g są równe.



9. $\sqrt{2016}+\sqrt{56}=\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 7}+\sqrt{2^3\cdot 7} = \sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 14}+\sqrt{2^2\cdot 14} =$
$12\sqrt{14}+2\sqrt{14} = 14\sqrt{14} = \sqrt{14^3} = 14^{3/2}$.

10. Szukanym przekrojem jest trójkąt pokazany na rysunku. Jego podstawa ma długość $3\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu), a opuszczona na nią wysokość jest przekątną kwadratu o boku $3\sqrt{2}/2$ (trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie 45°), czyli ma długość 3. Stąd pole trójkąta to ${}^1/_2\cdot 3\cdot 3\sqrt{2} = 4{,}5\sqrt{2}$.

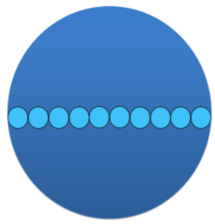


DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1. Która z figur na rysunku ma większy obwód: duże koło, czy suma jednakowych kół o środkach leżących na średnicy dużego koła, z których sąsiednie koła są styczne zewnętrznie, a skrajne są styczne wewnętrznie do dużego koła?



2. Ile razy cyfra 9 pojawia się w wyniku mnożenia $98765432109876543210\ldots9876543210 \cdot 9$, gdzie w pierwszym czynniku grupa cyfr 9876543210 powtarza się 2016 razy?

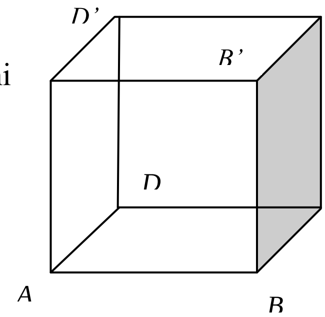
3. Wewnątrz kwadratowego pudełka o krawędzi 5 cm toczy się bez poślizgu moneta o promieniu 1 cm. Przetacza się raz wzdłuż brzegu kwadratu i wraca na swoje miejsce. Jaką drogę pokonuje w tym ruchu środek okręgu?

4. Wydawca tysiącstronicowej książki pt. "Dlaczego nie dzielimy przez zero" wydrukował numery stron w specjalny sposób. Każda cyfra 0 ma kolor czerwony, a pozostałe cyfry – czarny. Ile cyfr każdego z kolorów pojawiło się w numeracji stron?

5. Jaki jest największy wspólny dzielnik wszystkich liczb będących sześcianami całkowitych liczb dodatnich pomniejszonymi o te liczby?

6. Czy istnieje liczba o tej własności, że średnia geometryczna liczb otrzymanych przez jej zwiększenie o 3 i zmniejszenie o 1 jest o jedną drugą większa od tej liczby?

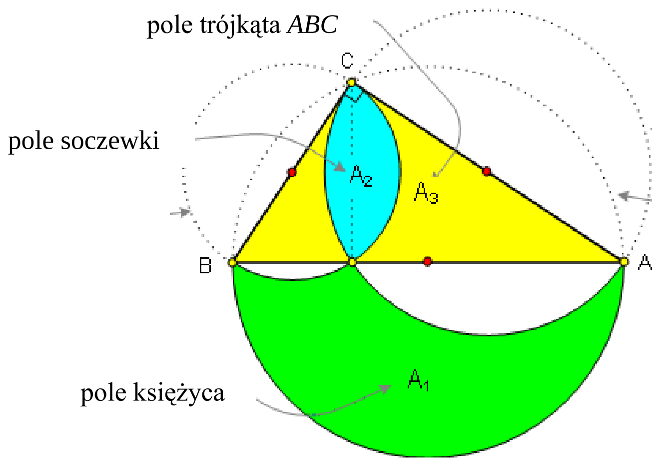
7. Na każdej z dwóch prostych równoległych wybrano po pięć punktów. Jaka jest największa możliwa liczba trójkątów, których wierzchołkami są te punkty?



8. Przekrój sześcianu *ABCDA'B'C'B'* o krawędzi długości 3 zawiera wierzchołek *A* oraz środki krawędzi *BB'* oraz *DD'*. Oblicz pole tego przekroju.

9. Ile jest liczb 6-cyfrowych o różnych cyfrach od 1 do 6, mających tę własność, że liczba utworzona z pierwszej cyfry dzieli się przez 1, utworzona z pierwszych 2 cyfr dzieli się przez 2, z pierwszych 3 cyfr dzieli się przez 3, z pierwszych 4 cyfr dzieli się przez 4, z pierwszych 5 cyfr dzieli się przez 5, a z pierwszych 6 – dzieli się przez 6?

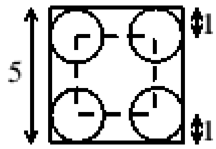
10. Na bokach trójkąta prostokątnego *ABC* jako na średnicach wykreślono okręgi, które utworzyły tzw. księżyce Hipokratesa. Pokaż, że pole A_3 jest różnicą pól A_1 i A_2.



EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Niech małe koła mają promień r. Wówczas duże koło ma promień $10r$. Obwody obu figur są równe i wynoszą $20\pi r$.

2. Ponieważ 9876543210·9 = 88888888890 (9 ósemek) możemy dopisywać te same wyniki jeden za drugim, a ósemki z przeniesienia będą wpisywały się w miejsca zer. Ostateczny wynik będzie wyglądał tak 8888888889 8888888889…8888888889 88888888890 (między dziewiątkami jest po 9 ósemek). Czyli w wyniku będzie 2016 dziewiątek.



3. Środek okręgu zakreśla kwadrat o boku 3 cm, czyli pokonuje drogę 12 cm.

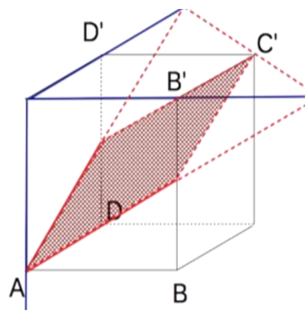
4. Do ponumerowania tysiąca stron potrzeba 9·1+90·2+900·3+4 = 9+180+2700+4 = 2893 cyfr. Wśród nich zero pojawia się 9 razy w liczbach dwucyfrowych, po 9 razy w zbiorach liczb {101,102, , 109}, {201, 02, …209}, …, {901, 402, …, 909} oraz {110, 120, … 190}, {210, 220, .., 290}, …, {910, 920, …, 990} oraz po 2 w liczbach 100, 200, …, 900 i jeszcze 3 razy w liczbie 1000. Zer jest więc 9+ 9·18+2·9+3 = 21·9+3 = 192. Zatem w książce są 192 czerwone cyfry oraz 2893–192 = 2701 czarnych. Każda pomyłka rachunkowa to 3 punkty mniej.

5. Liczby podane w zadaniu są postaci n^3-n lub równoważnie $n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$. Są to iloczyny trzech kolejnych liczb całkowitych. Wśród nich musi być co najmniej jedna liczba parzysta (bo co druga jest parzysta) – nazwijmy ją D i dokładnie jedna podzielna przez 3 (bo co trzecia jest podzielna przez 3) nazwijmy ją T. Ponieważ liczby 2 i 3 są względnie pierwsze, a) jeśli $D=T$, to ta liczba dzieli się przez 6; b) jeśli $D\neq T$, to $D\cdot T$ dzieli się przez 6.
Za brak uwagi o względnej pierwszości 2 i 3 odejmujemy 3 pkt, np. 12 dzieli się przez 2 i 12 dzieli się przez 4, a z tego nie wynika, że 12 dzieli się przez 2·4. Zatem każdy iloczyn trzech kolejnych liczb dzieli się przez 6 i to jest wspólny dzielnik wszystkich takich iloczynów. Jest to też największy wspólny dzielnik, bo wśród tych liczb jest $2^3-2 = 6$, więc większy być nie może.

6. Z treści zadania otrzymujemy równanie $\sqrt{(x+3)(x-1)} = x+\frac{1}{2}$. Za poprawne równanie przyznajemy 3 pkt.
Po podniesieniu obu stron do kwadratu dostajemy równanie $x^2+2x-3 = x^2+x+0{,}25$ równoważne równaniu $x=3{,}25$ (za tę odpowiedź kolejne 3 pkt). Ponieważ podnoszenie do kwadratu nie było przejściem równoważnym, trzeba sprawdzić, czy jest to pierwiastek wyjściowego równania (tzn. czy wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie i czy wartość pierwiastka jest dodatnia). Tak jest, ale jeśli uczeń nie wykona sprawdzenia (lub nie wyznaczy dziedziny równania) odejmujemy 4 pkt.

7. Podstawę trójkąta na pierwszej prostej możemy wybrać na 10 sposobów (4 z nich zawierają po 2 punkty, 3 zawierają 3 punkty, 2 zawierają 4 punkty i 1 zawiera 5 punktów). Dla każdej z podstaw trzeci wierzchołek trójkąta na drugiej prostej możemy wybrać na 5 sposobów, co daje 10·5 = 50 trójkątów. Możemy jeszcze zamienić proste rolami, zatem wszystkich trójkątów może być 100.

8. Płaszczyzna przekroju musi zawierać odcinek łączący środki krawędzi BB' i DD', czyli w szczególności zawiera środek sześcianu. Musi też zawierać odcinek łączący punkt A ze środkiem sześcianu, czyli odcinek AC'. Widać zatem, że ten przekrój jest rombem (cztery równe boki) o przekątnych długości $3\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu) i $3\sqrt{3}$ (przekątna sześcianu). Pole tego rombu to $\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3} = 4{,}5\sqrt{6}$.



9. Suma cyfr 1+2+3+4+5+6 jest podzielna przez 3, więc uda się uzyskać podzielność całej liczby przez 3 (a jeśli będzie parzysta, to także przez 6). Na miejscach o numerach parzystych muszą stać cyfry parzyste, więc na miejscach nieparzystych muszą stać cyfry nieparzyste. Na V miejscu musi stać 5. Na miejscu I i III muszą więc stać 1 lub 3 (w dowolnej kolejności). Ich suma to 4, więc na miejscu II musi stać 2, co dopełni tę sumę do 6 (do 9 nie może, bo ma to być cyfra parzysta). Na miejscu IV nie może stać 4, bo 14 ani 34 nie dzieli się przez 4, zatem musi tu stać 6. Na VI miejsce zostało tylko 4. Są zatem dwie takie liczby: 123654 lub 321654.

10. Niech przyprostokątne mają długości a, b, a przeciwprostokątna c. Oznaczmy przez T_1, i T_2 część pola trójkąta odpowiednio na lewo i na prawo od soczewki A_2. Oznaczmy przez p_1 i $p2$ pola małych księżyców leżących pomiędzy trójkątem a księżyce A_1. Półkola oparte na przyprostokątnych dają z jednej strony sumę pól $\pi a^2/8 + \pi b^2/8 = \pi c^2/8$ (z twierdzenia Pitagorasa), a z drugiej $(A_2+p_1+T_1) + (A_2+T_2+p_2)$. Z kolei pole półkola opartego na przeciwprostokątnej jest równe tyle samo, bo $\pi c^2/8$, a z drugiej strony $A_1+p_1+p_2$. Z przyrównania tych wielkości mamy $A_2+p_1+T_1 + A_2+T_2+p_2 = A_1+p_1+p_2$, co daje $A_2+(T_1+A_2+T_2) = A_1$, czyli $A_2+A_3 = A_1$.

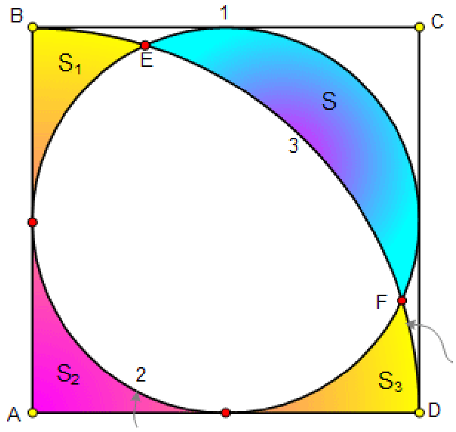
DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA
MECZ III

1. W gospodarstwie rolnika Franciszka w tym roku zebrano jęczmień z 36 ha. Na kolejny rok zaplanował on wzrost wydajności plonów z 1 ha o 8%, a wzrost całego zbioru jęczmienia o 20%. O ile ha musi zwiększyć obszar uprawy jęczmienia, aby wykonać ten plan?

2. Jaka jest najmniejsza liczba, której kwadrat dzieli się przez 2016?

3. Trzej przyjaciele z boiska wypowiedzieli takie zdania:
   Adam: Dokładnie jeden z moich kolegów (Barnaba lub Celestyn) mówi prawdę.
   Barnaba: Dokładnie jeden z moich kolegów (Adam lub Celestyn) mówi prawdę.
   Celestyn: Żaden z moich kolegów (ani Adam, ani Barnaba) nie mówi prawdy.
   Kto skłamał?

4. Podwieczorek, na którym było dwa razy więcej chłopców niż dziewcząt, kosztował 1584 zł. Każdy chłopiec zapłacił 8 razy tyle groszy, ilu było chłopców, a każda dziewczyna 12 razy tyle groszy, ile było dziewcząt. Ilu było chłopców, a ile dziewcząt na podwieczorku?



5. Jaka jest ostatnia cyfra liczby $5^{2016} + 10^{2016} + 9^{2016}$?

6. W jakim porządku występują na osi liczbowej potęgi liczby 2016 o wykładnikach ze zbioru $\{-1, -^1/_2, 0, ½, 1\}$ i liczba 0?

7. Ile jest liczb dwucyfrowych, które mają największą możliwą liczbę dzielników?

8. *ABCD* jest kwadratem o boku długości 1. Figura 2 jest okręgiem wpisanym w kwadrat, a łuk 3 jest ćwiartką okręgu o środku w *A*. Pokaż, że $S = S_1+S_2+S_3$.

9. Jaki jest największy wspólny dzielnik wszystkich liczb będących piątymi potęgami całkowitych liczb dodatnich pomniejszonymi o te liczby?

10. Sześcian o krawędzi długości 3 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2016/17
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy przez x plon z 1ha w tym roku. Wtedy tegoroczny zbiór jęczmienia wynosi $36x$. Za rok zbiór jęczmienia ma wynieść $1{,}2\cdot 36x$, przy czym plon z 1 ha wyniesie $1{,}08x$, a obsiane jęczmieniem pole będzie miało $36+y$ ha. Stąd $(36+y)\cdot 1{,}8x = 1{,}2\cdot 36x$. Zatem $(36+y)\cdot 1{,}08 = 36\cdot 1{,}2$ i dalej $y = 4$. Franciszek musi obsiać jęczmieniem 4 ha więcej.

2. Po rozłożeniu na czynniki pierwsze mamy $2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Aby liczba była kwadratem, każdy czynnik musi w niej wystąpić parzystą liczbę razy, zatem szukany najmniejszy kwadrat to $2^6\cdot 3^2\cdot 7^2 = (2^3\cdot 3\cdot 7)^2 = (8\cdot 21)^2 = 168^2$. Za odpowiedź 168 bez uzasadnienia przyznajemy 3 pkt. Za bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt. Za metodę polegającą na sprawdzaniu wielu przypadków przyznajemy do 6 pkt.

3. Załóżmy, że Celestyn mówi prawdę. Wtedy Adam i Barnaba kłamią. Ale wówczas ich zdania są prawdziwe. Zatem Celestyn skłamał. Czy ktoś jeszcze? Trzeba to sprawdzić. (do tego miejsca przyznajemy 5 pkt). Jeśli Celestyn kłamie, to przynajmniej jeden z jego kolegów mówi prawdę. Ale jeśli Barnaba mówi prawdę, to zdanie Adama jest prawdziwe, a jeśli Adam mówi prawdę, to zdanie Barnaby jest prawdziwe. Zatem rzeczywiście tylko Celestyn skłamał.

4. Wiemy, że $C = 2D$, każdy chłopiec zapłacił $8\cdot{}^{C}/_{100}$ zł, a dziewczyna $12\cdot{}^{D}/_{100}$ zł. To znaczy, że $8C^2/100 + 12D^2/100 = 1584$. Zatem $8\cdot 4D^2/100 + 12D^2/100 = 1584$, skąd $44D^2/100= 1584$, czyli $D^2 = 3600$ i $D = 60$, a $C = 120$.

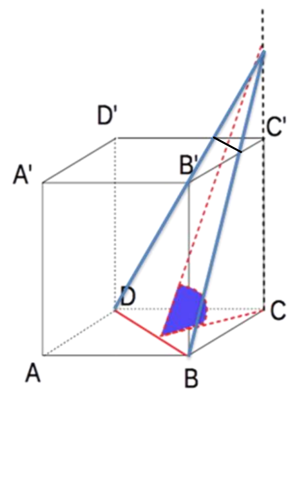
5. Potęgi 5 kończą się na 5, potęgi 10 kończą się na 10, a potęgi 9 kończą się na 9 (nieparzyste) lub 1 (parzyste). Wynika to z faktu, że ostatnia cyfra iloczynu liczb zależy tylko od ostatniej cyfry czynników, co z kolei wynika np. z algorytmu mnożenia pisemnego. To samo zachodzi dla ostatniej cyfry sumy liczb. Za brak uzasadnienia powyższych własności odejmujemy 4 pkt. Zatem ostatnią cyfrą podanej liczby jest $5+1 = 6$.

6. Z definicji $2016^0 = 1$, $2016^1 = 2016$, a $2016^{1/2} = \sqrt{2016}$, więc jest to liczba pomiędzy 1 a 2016. Ujemne wykładniki oznaczają branie odwrotności liczb, zatem ${}^{1}/_{2016}$ i ${}^{1}/_{\sqrt{2016}}$ są dodatnie, mniejsze od 1 i występują w odwrotnym porządku niż poprzednio 2016 i $\sqrt{2016}$. Właściwa kolejność na osi jest więc taka: 0, 2016^{-1}, $2016^{-1/2}$, 2016^0, $2016^{1/2}$ i 2016^1.

7. Aby uzyskać jak najwięcej dzielników, musimy mnożyć jak najwięcej jak najmniejszych liczb różnych od 1. Można mnożyć same dwójki i wówczas uzyskamy maksymalnie $2^6=64$, czyli 7 dzielników (wybieramy potęgę dwójki od 0 do 6). Możemy mnożyć 2 i 3, np. $2^4\cdot 3=48$ (co daje $5\cdot 2 = 10$ dzielników, bo aby utworzyć dzielnik, wybieramy niezależnie potęgę dwójki od 0 do 4 i potęgę trójki od 0 do 1), ale lepiej wziąć $2^5\cdot 3 =$ **96**, co daje $6\cdot 2 = 12$ dzielników (wybieramy potęgę dwójki od 0 do 5 i potęgę trójki od 0 do 1), możemy też wziąć $2^3\cdot 3^2 =$ **72**, co także daje $4\cdot 3 = 12$ dzielników. Mnożąc trzy czynniki możemy wziąć $2^2\cdot 3\cdot 5 =$ **60** ($3\cdot 2\cdot 2=12$ dzielników) lub $2^2\cdot 3\cdot 7 =$ **84** ($3\cdot 2\cdot 2=12$ dzielników) lub $2\cdot 3^2\cdot 5 =$ **90** ($2\cdot 3\cdot 2=12$ dzielników). Inne liczby przekraczają zakres dwucyfrowy (ale trzeba sprawdzić te najmniejsze), np. $2^2\cdot 3^3 = 108$, $2^4\cdot 3^2=144$. Ostatecznie trzymujemy 5 liczb.

8. Niech p oznacza pole każdej z części $S_2–S_1 = S_2–S_3$. Zachodzi $S+ S_2+2p$ to kwadrat pomniejszony o ćwiartkę koła o promieniu 1, czyli ma pole $1–\pi/4$. Natomiast $S_1+p+S_3+p+2S_2$ to kwadrat pomniejszony o koło o promieniu ½, czyli też ma pole $1–\pi/4$. Przyrównując te wielkości otrzymujemy $S+ S_2+2p = S_1+p+S_3+p+2S_2$, czyli $S = S_1+S_3+S_2$.

9. Liczby podane w zadaniu są postaci $n^5–n$ lub równoważnie $n(n^4–1) = n(n^2–1)(n^2+1) = n(n–1)(n+1)(n^2+1) = n(n–1)(n+1)(n^2–4+5) = n(n–1)(n+1)(n^2-4) + n(n–1)(n+1)\cdot 5 = n(n–1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n–1)(n+1)$. Pierwszy składnik jest iloczynem pięciu kolejnych liczb całkowitych, czyli dzieli się przez 5 (bo co piąta liczba się dzieli), a drugi składnik też jest wielokrotnością pięciu. Oba składniki zawierają czynniki parzyste, więc cała liczba jest parzysta, oba składniki są też podzielne przez 3, bo zawierają iloczyny trzech kolejnych liczb. Zatem cała liczba jest podzielna przez $2\cdot 3\cdot 5 = 30$ (korzystamy z faktu, że 2, 3 i 5 są parami względnie pierwsze, wiec podzielność przez te liczby jest równoważna podzielności przez ich iloczyn –za brak tego stwierdzenia odejmujemy 3 pkt). Zatem 30 jest wspólnym dzielnikiem szukanych liczb, ale wśród nich jest też $30 = 2^5–2$, więc jest to też ich największy wspólny dzielnik.



10. Szukanym przekrojem jest trapez równoramienny pokazany na rysunku. Wierzchołek trójkąta na przedłużeniu CC’ nazwijmy C”. Wysokość trójkąta BDC” jest bokiem trójkąta równobocznego i ma długość $3\sqrt{2}$. Odcinek CC” jest wysokością tego trójkąta równobocznego, wiec ma długość $3\sqrt{6}/2$. Odcinek $C’C$” ma długość $3\sqrt{6}/2–3$. Stosunek CC” do $C’C$” ustala skalę podobieństwa dwóch czworościanów i skala ta wynosi $(3\sqrt{6}/2)$: $(3\sqrt{6}/2–3) = 3+\sqrt{6}$. W tym stosunku są też podstawy trapezu. Dolna ma $3\sqrt{2}$

(przekątna kwadratu), wiec górna ma długość $3\sqrt{2} / (3+\sqrt{6}) = 3\sqrt{2} - \sqrt{12}$. Trójkąty podobne na ścianie *BDC*" mają podstawy równe wysokościom, zatem wysokość małego trójkąta też ma $3\sqrt{2} - \sqrt{12}$, więc wysokość trapezu ma $\sqrt{12}$. Teraz obliczamy pole trapezu $\frac{1}{2}(3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{12})\cdot\sqrt{12} = 3\sqrt{24}-6 = 6\sqrt{6}-6$.