



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IX – ROK SZKOLNY 2009/10
LICEA – WIELKI FINAŁ

- Zad. 1. Czy istnieją różne liczby naturalne $x_1, x_2, \dots, x_{100}$, takie że NWD ich wszystkich wynosi 1, ale NWD żadnych dwóch z nich nie jest jedynką?
- Zad. 2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie losowo wybrane przekątne ścian graniastosłupa prawidłowego stukątnego będą równoległe?
- Zad. 3. Czy istnieje funkcja o dziedzinie $(-\infty, 0) \cup (2, 3)$ i zbiorze wartości $\langle 1, 2010 \rangle \setminus \{2009\}$?
- Zad. 4. Definiujemy działanie $\heartsuit$ na liczbach naturalnych (z zerem): $a \heartsuit b = 7$, gdy $ab=0$, a w przeciwnym razie $a \heartsuit b = (0 \heartsuit b) + (c \heartsuit 2)$, gdzie c jest resztą z dzielenia a przez b . Czy taka definicja pozwala obliczyć $a \heartsuit b$ dla dowolnych a i b naturalnych?
- Zad. 5. Jaki maksymalnie obwód może mieć trójkąt pitagorejski, którego jeden bok ma długość 2010?
- Zad. 6. Kula bilardowa stoi w rogu prostokątnego stołu o wymiarach $1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ i porusza się bez tarcia. Na ile sposobów można ją uderzyć, żeby wróciła do punktu startu po dokładnie 10 odbiciach od band?
- Zad. 7. W trapezie o podstawach a i b poprowadzono przez punkt przecięcia przekątnych odcinek równoległy do podstaw i łączący ramiona. Oblicz jego długość.
- Zad. 8. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $x^{2010} + 2010^{2009} = x^{2009} + 2010^{2010}$.
- Zad. 9. Dwa przystające prostopadłościany sklejamy w jeden na wszystkie możliwe sposoby. Oznaczmy największe z pól powierzchni otrzymanych prostopadłościanów przez P_0 , a najmniejsze przez P_1 . Jakie wartości może przyjmować stosunek $P_0 : P_1$?
- Zad. 10. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty, które są środkami boków czworokąta. Który z takich czworokątów ma największe pole?