XVIII (KORONA)MISTRZOSTWA POLSKI W GEOMETRII ELEMENTARNEJ
16 MAJA 2020

Zad. 1. Dwa okręgi przecinają się w punktach *A* i *B*. Przez punkt *A* poprowadzono styczne do obu okręgów przecinające te okręgi w punktach *C* i *D*. Wykaż, że $|AC|^2 \cdot |BD| = |AD|^2 \cdot |BC|$.

Zad. 2. W kwadracie *ABCD* (o boku długości *a*) na *BC* obrano punkt *M*, taki że $|BM| = 3|MC|$, a na *CD* obrano punkt *N*, taki że $2|CN| = |ND|$. Znajdź długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt *AMN*.

Zad. 3. W okręgu o promieniu długości *R* dane są dwie prostopadłe cięciwy *MN* i *PQ*. Znajdź odległość między *M* i *P*, jeśli $|NQ| = a$.

Zad. 4. W trapez wpisano okrąg. Oblicz pole tego trapezu, wiedząc, że jedna z podstaw ma długość *a*, a punkt styczności dzieli jedno z ramion na odcinki o długościach *b* i *c*, przy czym odcinek długości *b* jest bliższy podstawie długości *a*.

Zad. 5. W trójkącie *ABC* dwusieczna kąta *A* jest prostopadła do prostej przechodzącej przez ortocentrum (punkt przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta) i środek okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz miarę kąta *A*.

Zad. 6. Wykaż, że punkty symetryczne do ortocentrum względem środków boków trójkąta leżą na okręgu opisanym na tym trójkącie.

Zad. 7. W trójkącie *ABC* długości boków *BC*, *CA* i *AB* wynoszą odpowiednio *a*, *b*, i *c* tworzą ciąg arytmetyczny ($b > a > c$). Wykaż, że $|AI| = |IW|$, gdzie *I* jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a *W* – punktem przecięcia prostej *AI* z okręgiem opisanym na tym trójkącie.

Zad. 8. W trójkąt *ABC* wpisano okrąg styczny do boków *AB*, *BC* i *CA* odpowiednio w punktach *D*, *E* i *F*. Przez punkt *E* poprowadzono średnicę *GE* tego okręgu. Wiedząc, że kąt *CGB* jest prosty, a bok *BC* ma długość *a*, oblicz długość odcinka *AD*.

Zad. 9. Wykaż, że punkty symetryczne do środka okręgu opisanego na trójkącie względem środków jego środkowych leżą na prostych zawierających wysokości trójkąta.

Zad. 10. Dwa okręgi s_1 i s_2 przecinają się w punktach A i *B*. Na s_2 obrano punkt *C*, taki że *CA* jest styczny do s_1. Przez *A* poprowadzono prostą przecinającą okręgi s_1 i s_2 odpowiednio w punktach *M* i *N*. Niech *P* będzie środkiem odcinka *AC*, *Q* – środkiem odcinka *MN*, a *S* – punktem przecięcia prostej *BQ* z okręgiem s_1 ($S \neq B$). Wykaż, że $AS \parallel PQ$.

Zad. 11. Czworokąt *ABCD* wpisano w okrąg. Przedłużono boki AB i *CD* do przecięcia w punkcie *K*, a boki *BC* i *AD* do przecięcia w punkcie *L*. Niech *E* będzie rzutem prostokątnym punktu *K* na prostą *AL*, a *F* – rzutem prostokątnym punktu *L* na prostą *AK*. Wykaż, że prosta *EF* dzieli przekątną *BD* na połowy.

Zad. 12. W trójkącie *ABC* kąt *C* jest prosty, a *CD* jest wysokością. Niech *K* będzie dowolnym takim punktem, że $|AK| = |AC|$. Wykaż, że średnica okręgu opisanego na trójkącie *ABK* i przechodząca przez punkt *A* jest prostopadła do prostej *DK*.