KoALa (KOmbinatoryka-Algorytmika-Logika)

V Liceum Ogólnokształcące im. Klaudyny Potockiej w Poznaniu,
Wydział Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu,
Fundacja Matematyków Wrocławskich,
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

MECZ SPARINGOWY WIELKOPOLSKA – DOLNY ŚLĄSK

Zad. 0. ***Zepsuta pamięć***

Blok pamięci komputera 4×4 komórki jest kontrolowany 8 przełącznikami. Jeśli włączone są przełączniki A i 1, czytana jest komórka A1 itd.

Aktualna zawartość tego fragmentu pamięci to:

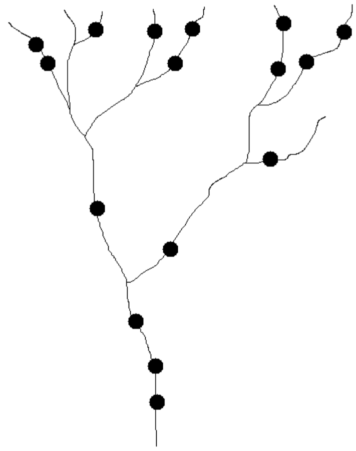
	A	B	C	D
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	1	1	0

Jeśli zepsuje się przełącznik kolumny, zamiast dowolnej komórki czytana jest komórka tej kolumny z danego wiersza, np. gdy popsuty jest przełącznik A, zamiast każdej z komórek A1, B1, C1 i D1 zostanie odczytana wartość z A1, a zamiast każdej z komórek A2, B2, C2 i D2 zostanie odczytana wartość z A2 itd. Podobnie jeśli zepsuje się przełącznik wiersza, zamiast dowolnej komórki czytana jest komórka tego wiersza z danej kolumny, np. gdy popsuty jest przełącznik 3, zamiast każdej z komórek A1, A2, A3, A4 zostanie przeczytana komórka A3.

Wiadomo, że jeden przełącznik jest zepsuty, a w efekcie odczytu wszystkich komórek jednego z wierszy otrzymano dwa razy 0 i dwa razy 1 (niekoniecznie w tej kolejności). Podaj przełączniki, które mogą być popsute.

Zad. 1. ***Zanieczyszczenia***

Na rysunku przedstawiono dorzecze Bajtału, dużej rzeki w Bajtocji, gdzie wszystkie rzeki płyną odwrotnie niż w Polsce – w dół mapy. Kropkami zaznaczono fabryki, z których jedna, jak donoszą przemysłowi szpiedzy, zanieczyszcza Bajtał (niekoniecznie bezpośrednio, tzn. może chodzić o fabrykę odprowadzającą zanieczyszczenia do jednego z jego dopływów). Waszym zadaniem jest ustalić, która to fabryka, mając możliwość przetestowania wody w dowolnym punkcie dorzecza. (Można stwierdzić, czy płynąca tam woda jest czysta, czy nie). Badania takie są jednak drogie i chodzi o to, żeby zminimalizować ich liczbę. Możecie ustalać miejsce każdego testu po odczytaniu wyników poprzedniego. Jaka największa liczba testów może okazać się potrzebna przy optymalnym ich wykonywaniu?



Zad. 2. ***Laptopy***

Bogata firma informatyczna rozdaje laptopy trojgu członkom zarządu wg następującego schematu: pierwszego laptopa dostaje pan Andrzej, kolejne dwa – pani Basia, trzy dalsze – pan Czesław, następne cztery – pan Andrzej, kolejnych pięć – pani Basia itd., aż rozdane zostaną wszystkie. Gdyby np. firma miała 11 laptopów, kolejno 1 trafiłby do pana A., dwa do pani B., trzy do pana C., kolejne cztery do pana A. i ostatni do pani B.

Ile laptopów mógł dostać pan Czesław, jeśli pani Basia otrzymała ich w rzeczywistości 123?

Zad. 3. ***Jedynki***

Dla danej początkowej wartości naturalnej n uruchamiamy następujący algorytm:

1: Jeśli $n = 0$, zakończ pracę.

2: Jeśli n jest nieparzyste, napisz 1 i zmniejsz n o 1.

3: Jeśli n jest parzyste, podziel n przez 2.

4: Przejdź do punktu 1.

Ile jest liczb naturalnych, które jako początkowe wartości n spowodują, że algorytm wykona 101 dzieleń, a wskutek jego działania wypisze się w sumie 100 jedynek?

Zad. 4. ***Protokół***

Jedna z firm ubezpieczeniowych w erze telefonów stacjonarnych, przed wynalezieniem faksów, posługiwała się następującą procedurą (protokołem komunikacyjnym) przekazywania w szybki sposób ważnych informacji do ponad 2,5 tys. oddziałów firmy: Z siedziby firmy wyznaczony pracownik wykonywał tylko dwie rozmowy telefoniczne, jedna po drugiej, do dwóch oddziałów firmy. Dalej treść informacji była przekazywana z każdego z powiadomionych oddziałów dokładnie do dwóch innych oddziałów itd. Oczywiście każdy oddział miał stałych, zawsze tych samych rozmówców.

Do jakiej liczby oddziałów docierała informacja w ciągu 10 minut, jeśli założyć, że każda rozmowa trwa minutę, a osoba poinformowana w ciągu kolejnych dwóch minut przeprowadza, jedna po drugiej, dwie rozmowy z innymi oddziałami firmy?

Zad. 5. ***Bloki liter***

Dany jest ciąg złożony ze 100 liter A, 200 liter B i 300 liter C (w nieznanej kolejności). Wyznacz liczbę zwartych bloków liter tego ciągu o następujących własnościach: blok rozpoczyna się oraz kończy literą A i zawiera co najmniej jeszcze jedną literę A.

Przykład: Dla ciągu ABAABCA blokami spełniającymi warunki zadania są: ABAA oraz AABCA oraz ABAABCA.

Zad. 6. ***Jabłka***

Jaś i Joasia bardzo lubią jabłka, ale kochają też matematykę, a w szczególności teorię gier! Jaś, starszy brat Joasi, zaproponował siostrze następującą grę, której celem będzie podział trzech dużych jabłek:

– Będę przecinać jabłka na dwie części: zawsze jedna z nich będzie dla Ciebie, a druga dla mnie. Za każdym razem, gdy już przekroję kolejne jabłko, będziesz mogła zdecydować, czy Ty pierwsza wybierasz jedną z jego części, czy weźmiesz tę część, którą Ci zostawię, ale Ty możesz brać pierwsza tylko dwa razy.

Na jaką co najwyżej część z trzech jabłek (w sumie) Joasia może liczyć?

Uwagi: 1. wszystkie jabłka są identyczne. 2. Jaś może podzielić jabłko tak, że jedna z części będzie zawierać tylko ogonek, czyli jabłka w niej właściwie nie będzie... 3. Celem każdego z dzieci jest zjeść jak najwięcej☺

Zad. 7. ***Monety***

Wiadomo, że wśród 10 identycznie wyglądających monet jedna jest fałszywa, bo jest lżejsza. Rozstrzygnij, czy istnieje sposób ważenia z użyciem wagi szalkowej (bez odważników), który zawsze pozwoli wykryć fałszywą monetę w co najwyżej dwóch ważeniach.

Uwaga: na szalki wagi można kłaść dowolną liczbę monet.

Zad. 8. ***Konkurs informatyczny***

Ania bierze udział w konkursie programistycznym. Ma zadanie zaprojektować efektywny algorytm i napisać program, który dla danego ciągu liczb jednocyfrowych znajdzie sumę niektórych wyrazów tego ciągu. Wymaga się przy tym, aby pierwszym składnikiem sumy był pierwszy wyraz ciągu, ostatnim składnikiem – ostatni wyraz ciągu oraz by spełniona była implikacja: jeśli w skład sumy wchodzi jeden z wyrazów ciągu, to w skład sumy wchodzi też co najmniej jeden z dwóch kolejnych wyrazów (o ile takie istnieją). Co istotne, program Ani ma wyznaczać sumę, która ma nie tylko spełniać powyższą własność, ale ma być najmniejsza z możliwych. Np. dla ciągu 9, 7, 5, 3, 2 poszukiwana suma to 16 = 9 + 5 + 2. Dla ciągu 3, 5, 9, 7, 1, 6 – – 19 = 3 + 9 + 1 + 6.

Jak algorytm zaproponowałbyś na miejscu Ani?

Zad. 9. ***Punkty***

Każdy z punktów 1, 2, 3, ..., $2n$ na osi liczbowej pokolorowano na biało lub czarno, przy czym białych i czarnych jest po n, a przy zliczaniu ich kolejno od lewej liczba czarnych nigdy nie przekracza liczby białych. Punkty te podzielono na n różnokolorowych par i zsumowano wszystkie n odległości między sparowanymi punktami. Zaprojektuj i uzasadnij algorytm takiego podziału na pary, żeby otrzymana suma była najmniejsza z możliwych.

ROZW.

0. Zepsuta pamięć

Gdyby zepsuty był przełącznik kolumny, to cztery razy odczytana zostałaby ta sama wartość, czyli sprzeczność. Przy popsutym przełączniku wiersza, odczytane wartości pochodzą z jednego wiersza, zatem możliwymi odpowiedziami są przełączniki 1 i 2.

1. Zanieczyszczenia

Optymalnie jest eliminować w każdym kroku połowę podejrzanych fabryk, nie jest to jednak możliwe.

Należy zatem zbliżać się do możliwości połowienia zbioru kandydatów za każdym razem i pierwszym testem wyeliminować 7 lub 9 fabryk (czyli zrobić go przed ujściem ostatniego dopływu prawobrzeżnego).

9 da się potem analogicznie podzielić na 4+5, a 7 na 3+4 i w każdym w dalszych przypadków wystarczą jeszcze trzy testy. W sumie może być zatem potrzeba 5 testów. (Mimo że połowienie sugerowałoby odpowiedź 4, ale jest to możliwe przy dowolnym sposobie eliminacji kandydatów).

2. Laptopy

Pani B dostaje: $2 + 5 + 8 + ... + (3k+2) + x = 123$. Przy 9 składnikach z ciągu arytm. lewa strona daje $126+x$, co jest sprzeczne. Przy ośmiu mamy $100+x$, przy czym ostatni z ciągu to 23, czyli na pani B skończono rozdawanie, a pan C dostał w takim razie 3+6+9+..+24=108.

3. Jedynki

Wypisanie jedynki następuje przy nieparzystym n, a dzielenie przy parzystym, czyli odpowiednio gdy zapis binarny n kończy się jedynką i zerem. Każde wypisanie jedynki skutkuje zmianą ostatniej cyfry n z 1 na 0 i w efekcie dzieleniem. W dwójkowym zapisie n musi być więc 100 jedynek i dwa zera, czyli odp. to 101 po 2 = 5050.

4. Protokół

Zadanie można rozwiązać co najmniej na dwa sposoby:

1. Sumując na ile sposób 1, 2, 3, …, 10 można wyrazić jako sumy różnej liczby 1 lub 2. To metoda żmudna…

2. Jako sumę wyrazów ciągu: 1, 2, 3, 5, 8. 13. 21. 34, 55, 89.

(Liczba oddziałów, do których dodzwoniono się w minucie n (n>2), jest równa liczbie oddziałów, do których dodzwoniono się w minucie n-1, powiększonej o liczbę oddziałów, do których dodzwoniono się w minucie n-2.)

Odp. 231.

5. Bloki liter

Najpierw można wyznaczyć liczbę podciągów kończących się na ostatnim A. Jest ich oczywiście $n – 2$, gdzie n jest liczbą wystąpień znaku A w ciągu początkowym. Później wyznaczamy liczbę podciągów kończących się na przedostatnim A. Jest ich o 1 mniej. Wszystkich podciągów będzie więc: $(n – 2) + (n – 3) + … + 1$.

W przypadku ciągu podanego w zadaniu mamy: 98 + 97 + … + 1 = 4851.

6. Jabłka

Jaś powinien pohamować zachłanność i zastanowić się, czy istnieje taki sposób postępowania w każdym kroku, aby niezależnie od kolejnych decyzji siostry, zawsze dostała tyle samo (jej decyzje mają losowy charakter). Nie jest np. dobrym pomysłem równy podział jabłek za pierwszym razem: w konsekwencji Jaś nie ma szans na więcej niż 1,5 jabłka.

Są następujące możliwości:

I. Joasia wybiera pierwsza, tj. wybiera większą część (ozn. F).

IIa. Josia wybiera pierwsza, tj. wybiera większą część (ozn. G). W konsekwencji więcej nie dostanie.

lub

IIb. Jaś wybiera pierwszy, tj. Josia dostaje mniejszą część (ozn. 1—G). W kroku trzecim Joasia wybiera pierwsza, więc dostanie ½ jabłka.

Lub

I. Jaś wybiera pierwszy, więc Joasia dostaje 1—F. Później już Joasia zawsze wybiera pierwsza. Dostanie więc ½ + ½.

Zachodzi równość: F+G=F+(1—G)+1/2=(1—F)+1/2+1/2.

Stąd F=5/8 i G=3/4. Joasia dostanie więc 11/8 jabłka.

7. Monety

Przypuśćmy, że potrafimy wykryć fałszywą monetę za pomocą dwóch ważeń. Historię ważeń każdej monety kodujemy za pomocą ciągu długości dwa, np. kod LN oznacza, że moneta przy pierwszym ważeniu leżała na lewej szalce, a w drugim nie brała udziału. Kodów długości dwa o wyrazach L, N, P jest dziewięć, więc przynajmniej dwie monety miałyby ten sam kod, a więc nie byłyby porównywane. (Uzasadnienie pochodzi z książki *Markowe wykłady z matematyki. Matematyka dyskretna* p. Marka Zakrzewskiego).

Zadanie można rozwiązać analizując przypadki. Najpierw warto zauważyć, że nie ma sensu wkładać na szalki różnej liczby monet. Później przeanalizować pesymistyczne zdarzenia w przypadku, gdy za pierwszym razem na szalki wagi wkładamy odpowiednio po jednej, po dwie, po trzy i po cztery monety.

Odp. Nie.

8. Konkurs informatyczny

Poprawne rozwiązanie zadania wymaga przeprowadzenia analizy „od końca”, tj. 6 dołączymy do optymalnego podciągu kończącego się „7” lub optymalnego podciągu kończącego się „1” itd.

Mamy:

6, 1

6, 7

6, 1, 9

6, 7, 5

6, 1, 9, 3

6, 7, 5, 5

6, 1, 9, 3, 9

6, 7, 5, 5, 7

6, 1, 9, 3, 9, 1

6, 1, 9, 3, 9, 1, 6 (suma = 35)

9. Punkty

Aby rozwiązać zadanie, można uzasadnić dwie własności ciągu kropek:

1. Wszystkie układy połączeń, w których lewymi końcami połączeń są zawsze białe kropki, mają taką samą sumę długości połączeń.
2. Wszystkie układy połączeń, w których wśród lewych końców połączeń są również czarne kropki, mają większą sumę długości połączeń niż połączenia typu 1.

Rozwiązanie (uzasadnienia) można przedstawić graficznie (na wzór wypadkowej wektorów o wspólnym kierunku).

Najprostszym algorytmem jest łączenie kropek parami, na zasadzie dopasowywania (parowania) otwierających i zamykających nawiasów w wyrażeniu arytmetycznym.

Dla układu: o o ● o ● ● o ● odp. to ((5+1+1)+1)/4 = 2.