KOMBINATORYKA
ALGORYTMY
LOGIK**A**

KOALA 2022

MECZ

DOLNY ŚLĄSK – WIELKOPOLSKA

© Hanna Kuik

Zadań jest 10. Czas na rozwiązywanie: 90 min.

1. Sprzedawca awokado

Pewnego dnia pewien człowiek sprzedawał tylko identyczne owoce awokado. Tak zapamiętał swoich klientów:

- Pierwszy kupił 1/3 tego co miałem i jeszcze 2/3 pojedynczego owocu.
- Drugi kupił 1/3 reszty.
- Trzeci kupił 1/3 reszty i jeszcze 1/3 pojedynczego owocu.
- Czwarty kupił 1/3 reszty i jeszcze 1/3 pojedynczego owocu.
- Piąty kupił 1/3 reszty i jeszcze 2/3 pojedynczego owocu.
- Szósty kupił 1/3 reszty.
- Siódmy kupił 1/3 reszty i jeszcze 1/3 pojedynczego owocu.
- Ósmy kupił 1/3 reszty i jeszcze 1/3 pojedynczego owocu.
- Dziewiąty kupił 1/3 reszty.
- Dziesiąty kupił 1/3 reszty i jeszcze 1/3 pojedynczego owocu.
- Jedenasty kupił 1/3 reszty i jeszcze 2/3 pojedynczego owocu.
- Po tym nie zostało mi już nic.

Ile owoców sprzedał tego dnia?

2. Porządkowanie

W standardowej talii kart jest 13 pików o wartościach: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W, D, K, A.

Ktoś ułożył na stole wszystkie piki w rzędzie, w przypadkowej kolejności. Podchodzicie do stołu i widzicie, że piki nie są ustawione w kolejności od najmniejszej do największej, czyli od dwójek do asów. Możecie je porządkować następująco: W każdym ruchu wybieracie wg swego uznania dwie sąsiednie karty, leżące w kolejności większa-mniejsza i zamieniacie je miejscami. Wymyślcie taki sposób robienia opisanych ruchów, by – niezależnie od początkowego ustawienia kart – po co najwyżej 78 ruchach piki były uporządkowane, od dwójek do asów. Nie zapomnijcie o dokładnym uzasadnieniu, że przy waszej metoda rzeczywiście nigdy nie będzie trzeba zrobić więcej niż 78 ruchów.

3. Kolorowe domino

Tradycyjny komplet do gry w domino składa się z 28 płytek, na każdej płytce są dwie liczby ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (być może takie same) i każda para liczb występuje tylko raz. Komplet płytek domina pomalowano: Jeżeli obie liczby oczek na płyce są równe, to płytka jest zielona; jeżeli liczby oczek są różne, to pole z mniejszą liczbą oczek jest czerwone a to z wiekszą liczbą – niebieskie. Do pustego worka chcemy wrzucić niektóre płytki domina w taki sposób, by spełniony były trzy warunki:

(1) W worku nie ma zielonych płytek.

(2) Jeśli jakaś liczba oczek pojawia się w worku na czerwonym polu, to nie pojawia się na polu niebieskim innej płytki w worku.

(3) Dla każdej płytki p w worku, do worka wrzucona jest też każda płytka, która ma w czerwonym polu nie więcej oczek niż znajdujących się w czerwonym polu płytki p, a jednocześnie w niebieskim polu – nie mniej oczek niż tych w niebieskim polu płytki p.

Na ile sposobów możemy stworzyć tak opisany, niepusty worek z płytkami?

4. Odważniki

Rafał ma po jednym odważniku o wadze (w gramach): 1, 4, 16, 64, 256. Kasia ma po jednym odważniku o wadze: 2, 8, 32, 128 i 512. Tomek – po jednym odważniku o wadze: 1, 2, . . . , 1000. Dzieci mają do tego pustą wagę szalkową. Najpierw Tomek kładzie jeden swój odważnik na szalce lewej lub prawej. Następnie Rafał i Kasia wspólnie starają się doprowadzić do równowagi, przy czym Rafał może kłaść swoje odważniki tylko na lewej szalce, a Kasia – tylko na prawej. Zarówno Rafał jaki i Kasia może na swojej szalce położyć tyle swoich odważników, ile chce, może też nic nie położyć. Nazwijmy odważnik Tomka dobrym, jeśli Tomek może wybrać dla niego szalkę tak, by po jego położeniu Kasia i Rafał byli w stanie doprowadzić do równowagi. Które odważniki Tomka są dobre?

Jeśli nie potraficie wyznaczyć wszystkich, znajdźcie ich jak najwięcej (oczywiście z uzasadnieniem, że są dobre). Im więcej dobrych odważników wyznaczycie – tym więcej punktów częściowych możecie zdobyć.

5. Trzy siostry

Książę Kirkor przybywa do chaty sióstr: Aliny, Balladyny i Celiny. Jedna z sióstr (nie wiadomo która) zawsze kłamie, jedna zawsze mówi prawdę, a jedna – czasem kłamie, czasem mówi prawdę, a w nocy zmienia się w wilka. Książę pragnie poślubić jedną z sióstr, ale nie chce poślubić wilkołaka. Przed dokonaniem wyboru może zadać jedno pytanie jednej z sióstr. Musi być to pytanie, na które odpowiedzią jest „tak” lub „nie”. Jakie pytanie powinien zadać, aby po uzyskaniu odpowiedzi móc oświadczyć się jednej z sióstr bez narażania się na ślub z wilkołakiem?

6. Gra w skreślanie

Na tablicy zapisano wszystkie liczby całkowite z przedziału $[-99, 99]$. Adaś i Basia grają w grę polegającą na tym, że na przemian skreślają po jednej liczbie z tablicy, przy czym przegrywa ten, kto pierwszy spowoduje, że suma wszystkich skreślonych liczb będzie zerem. Czy któreś z nich ma strategię wygrywającą, a jeśli tak, to jaką?

Przez strategie wygrywającą rozumiemy taki sposób gry, że gwarantuje zwycięstwo nawet z przeciwnikiem, który nie popełnia błedów.

7. Piesek Epsylon

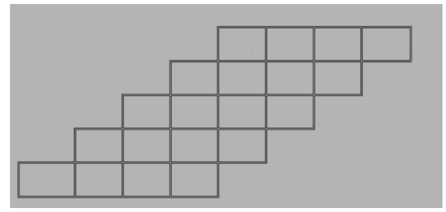
Przy prostoliniowej drodze, w równych odstępach 5-metrowych stoją latarnie, ponumerowane kolejno liczbami od 1 do 20. Bardzo mały piesek Epsylon oznaczył właśnie psim zwyczajem latarnię nr 11 i planuje oznaczyć wszystkie pozostałe (z których żadnej jeszcze nie oznaczył). Robi to w ten sposób, że wybiera zawsze latarnię jeszcze nieoznaczoną, biegnie do niej po prostej i oznacza ją, itd. Ile metrów ma **najkrótsza** możliwa trasa pieska? Nie zapomnijcie o uzasadnieniu, że krótsza być nie może.

8. Piesek Reksio

Przy prostoliniowej drodze, w równych odstępach 5-metrowych stoją latarnie, ponumerowane kolejno liczbami od 1 do 11. Bardzo mały piesek Reksio podbiegł właśnie do środkowej latarni, czyli tej o numerze 6 i zamierza psim zwyczajem oznaczyć wszystkie 11 latarni. Robi to w ten spoób, że wybiera zawsze latarnię jeszcze nieoznaczoną, biegnie do niej po prostej i oznacza ją, itd. Ile metrów ma **najdłusza** możliwa trasa pieska? Nie zapomnijcie o uzasadnieniu, że dłuższa być nie może.

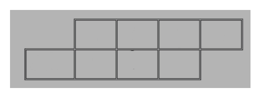
9. Szkoła na zboczu

Na zboczu wybudowano szkołę. Segmenty tworzące budynek szkoły mają różne liczby pięter, co pokazuje poniższy rysunek.

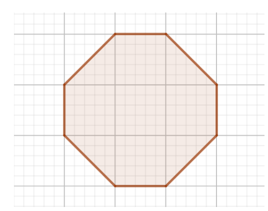


Pierwszy segment jest parterowy, drugi jest jednopiętrowy, trzeci – dwupiętrowy, czwarty – trzypiętrowy, piąty – trzypiętrowy, szósty – dwupiętrowy, siódmy – jednopiętrowy, a ósmy – parterowy. W szkole jest 20 pomieszczeń, na rysunku widocznych jako prostokąty. Z danego pomieszczenia można przejść do sąsiedniego pomieszczenia: albo idąc w dół, albo w górę, albo w prawo (o ile to możliwe). Na ile sposobów można dojść z pierwszego po lewej segmentu do pomieszczenia w ósmym segmencie, nie wracając nigdy do pomieszczenia, w którym już byliśmy?

Gdyby szkoła wyglądała jak na rysunku poniżej, to różnych dróg dojścia z pierwszego segmentu do pomieszczenia w piątym segmencie byłoby 4.



10. Talerze



Restauracja Oktagon słynie z talerzy w kształcie ośmiokąta, którego krótsze boki mają po 10 cm, a dłuższe $10\sqrt{2}$ cm (patrz rysunek).

Pewnego dnia matematyk, dorabiający w niej jako kelner, zbliżając się do prostokatnego stołu o wymiarach 90 cm $\times$ 180 cm, który właśnie miał nakrywać, dostrzegł na obrusie 6 małych plam. Nie mając czasu na wymianę obrusa, rozłożył talerze tak, by przykryć wszystkie plamy. Udowodnijcie, że dla dowolnego układu 6 plam (traktowanych jako punkty) takie rozłożenie talerzy jest możliwe. Zakładamy, że żadna plama nie znajduje się bliżej niż 10 cm od krawędzi stołu, zaś aby talerz nie spadł ze stołu, wystarczy by na stole (wliczając krawędź stołu) znajdował się środek talerza.

Talerze mogą się stykać, ale nie mogą na siebie nachodzić. Jeśli plama leży pod brzegiem talerza, to też jest zakryta.

Szkice rozwiązań

1. Sprzedawca awokado

Odpowiedź: 100

Rozwiązanie: Rozwiązujemy od końca. Przed ostatnim klientem było x_{11} owoców, klient kupił $1/3x_{11}+2/3$ i nic nie zostało, więc $x_{11}-1/3x_{11}+2/3=0$. Stąd $x_{11}=1$. Analogiczne równanie układamy dla kolejnego klienta (tylko zamiast nic zostaje wcześniej wyliczona liczba awokado):
$x_{10}-1/3x_{10}+2/3=x_{11}$, czyli $x_{10}=2$. I tak dalej. Otrzymujemy kolejno $x_9=3$, $x_8=5$, $x_7=8$, $x_6=12$, $x_5=19$, $x_4=29$, $x_3=44$, $x_2=66$, $x_1=100$.

2. Porządkowanie

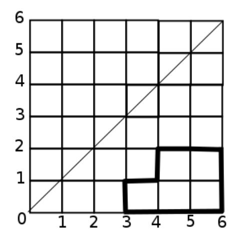
Rozwiązanie:

Każde sortowanie bąbelkowe n w najgorszym przypadku da $\binom{n}{2}$ ruchów, ale najprościej wskazać łatwy do uzasadnienia sposób, np. taki: Zawsze wybieramy kartę o najwyższej wartości, która nie jest jeszcze na swoim docelowym miejscu i zamieniamy ją z kartą po prawej. Wtedy karta najwyższa trafi na swoje miejsce po co najwyżej $n-1$ ruchach, druga od góry po co najwyżej $n-2$ ruchach, itd. Dla 13 kart ruchów jest co najwyżej $12+11+\ldots+1=78$.

3. Kolorowe domino

Odpowiedź: 63

Rozwiązanie: Rozważmy dozwolony worek z płytkami. Każdą płytkę z worka, z liczbami x, y, gdzie $x>y$, zaznaczamy jako punkt kratowy o współrzędnych (x, y). Z warunku (2) wynika, że brzeg zbioru wybranych punktów kratowych tworzy „schody”, oparte na osi OX i o prawy bok kraty – jeden z przykładów jest na poniższym rysunku.



Oba warunki (2) i (3) implikują, że te schody mieszczą się w prostokącie nie posiadających punktów wspólnych z prostą $y=x$, o jednym wierzchołku w prawym dolnym rogu kraty; nazwijmy taki prostokąt dobrym. Oto dokładniejsze uzasadnienie: Jeśli w worku jest płytka (x, y), to (3) mówi, nie ma w nim płytek postaci (y, z). Ponadto z (2) wynika, że w worku są wszystkie (x, y') dla $y' \leqslant y$ i ponownie z (3) otrzymujemy, że nie ma w worku (y', z) dla $y' \leqslant y$ i dowolnych z. Podobna argumentacja względem pierwszej współrzędnej prowadzi do wniosku, że w worku nie ma (z, x') dla $x' \geqslant x$ i dowolnych z. Jeśli zatem x_0 jest najmniejszą niebieską liczbą w worku, a y_0 – największą czerwoną, to $x_0>y_0$. Zatem wszystkie płytki mieszczą się w dobrym prostokącie o przeciwległych wierzchołkach (x_0, y_0) i $(6,0)$. Dobry prostokąt może byc zdegenerowany do odcinka lub nawet punktu $(6,0)$.

Z drugiej strony – każde schody mieszczące się w dobrym prostokącie wyznaczają worek płytek, spełniający warunki zadania: wrzucamy co worka każdą płytke odpowiadającą punktowi kratowemy schodów, uwzględniając wnętrze schodów. Zatem wystarczy policzyć, na ile sposobów możemy utworzyć schody zawarte w dobrym prostokącie.

Zauważmy, że każdy dobry prostokąt ma sumę długości i wysokości mniejszą niż 6, zaś przejście schodami możemy zakodować w postaci ciągu binarnego: 0 oznacza ruch w lewo, 1 oznacza ruch w górę. Wszystkich ruchów robimy co najwyżej 5, liczba zer pozwala jednoznacznie wyznaczyć punkt startowy na dolnym boku kraty (i dobrego prostokąta), zaś liczba jedynek – szczyt schodów, na prawym boku kraty. Każdy ciąg binarny długości co najwyżej 5 wyznacza schody mieszczące się w jakimś dobrym prostokącie i na odwrót – każdym schodom zawartym w jakimś dobrym prostokącie odpowiada ciąg binarny długości co najwyżej 5. Dzieląc na przypadki względem długości ciągu binarnego, otrzymujemy, że liczba rozważanych schodów wynosi $2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+1=2^6-1=63$.

4. Odważniki

Odpowiedź: 1, 2, ..., 682

Rozwiązanie:

Dobrych odważników jest tyle, ile jest różnic bezwzględnych miedzy wagą odważników z lewej i prawej szalki. Różnicę wag można zapisać jako 10-bitową liczbę w systemie negabinarnym – pozycyjnym o podstawie -2 – w którym np. 1101 oznacza $-8+4+1$, co odpowiada postawieniu na szalce Rafała odważników 1 i 4, a na szalce Kasi – odważnika 8.

Zauważmy, że w systemie negabinarnym iloczyn -2 i liczby o zapisie bitowym abcd ma zapis abcd0. Stąd otrzymujemy następujący algorytm zapisu liczby całkowitej n w systemie negabinarnym (algorytm znajduje bity od najmniej znaczącego począwszy):

Dopóki n nie jest zerem: zapisz n jako $-2m+r$, gdzie r to 0 lub 1; wypisz r, a za nową wartość n przyjmij m.

Uwaga: Gdy $n=-1$, to po jednokrotnym przejściu pętli otrzymamy wartość 1, a w pozostałych przypadkach n w każdym obrocie pętli zbliża się do 0, więc algorytm się zakończy i otrzymamy szukany zapis.

Zapis negabinarny można uzyskać także ze zwykłego dwójkowego, zamieniając dwójkę (jeśli bit dwójek to 1) na $4-2$, czyli ustawiając 1 jako bit o wadze -2 i dodając wartość 4 do części zapisu na lewo. Analogicznie postępujemy następnie z ósemką itd. Ponieważ zapis dwójkowy każdej liczby jest skończony, również to postępowanie kiedyś się skończy.

Zauważmy na koniec, że jeśli na n bitach możemy zapisać liczby całkowite z przedziału $[x,y]$, to na $n+1$ bitach – liczby z przedziału $[-2y,-2x+1]$, więc startując z przedziału $[0,1]$ dla 1 bitu, dochodzimy do przedziału $[-682,341]$. Zatem dobre odważniki Tomka to te o wadze $1,2,\ldots,682$.

Ciekawostka: taki systemu zapisu liczb odkrył (choć nie jako pierwszy) polski matematyk, prof. Pawlak i użyto go w latach 60. XX w. do projektowanych w Polsce komputerów.

5. Trzy siostry

Odpowiedź: np.
Celino, co byś odpowiedziała, gdybym zapytał cię, czy Balladyna jest wilkołakiem?

Rozwiązanie:

Kirkor może za pytać zapytać Celinę: „Co byś odpowiedziała, gdybym zapytał cię, czy Balladyna jest wilkołakiem?”. Jeśli odpowiedzią będzie „Tak” – powinien oświadczyć się Alinie. Jeśli odpowiedzią będzie „Nie” – powinien oświadczyć się Balladynie.

Jeśli Celina nie jest wilkołakiem, Kirkor może liczyć na to że odpowiedź na jego pytanie będzie zgodna z tym, czy Balladyna jest wilkołakiem, gdyż Celina albo zawsze mówi prawdę albo zawsze kłamie (i wtedy zadziała podwójne zaprzeczenie). Jeśli zaś Celina jest wilkołakiem, to jej odpowiedź nie ma znaczenia, ale ślub z dowolną z jej sióstr jest bezpieczny.

6. Gra w skreślanie

Odpowiedź: wygra Basia

Rozwiązanie:

Jeśli w pierwszym ruchu Adaś skreślił zero, to od razu przegrał. Jeśli skreślił liczbę x różną od zera, Basia skreśla zero. W swoim drugim ruchu Adaś nie może więc skreślić liczby $-x$ (ani zera, które zostało już skreślone), skreśla zatem jakąś liczbę y (różną od 0 i od $-x$). Wówczas Basia skreśla $-y$ i Adaś jest w podobnej sytuacji co przed poprzednim swoim ruchem, tylko do wyboru ma o dwie liczby mniej. I tak dalej. Ostatecznie Basia doprowadzi do sytuacji, gdzie Adasiowi zostanie do skreślenia tylko $-x$, i w tym momencie Adaś przegra.

7. Piesek Epsylon

Odpowiedź: $28 \cdot 5 = 140$

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że mierzymy trasę w jednostkach 5-metrowych. Niezależnie od trasy pieska, jeśli Epsylon z dwóch skrajnych latarni najpierw oznaczy x a potem y, to przebiegnie odległość równą co najmniej $|x-11|+|x-y|$. Zatem każda trasa liczy co najmniej $\min(10+19, 9+19) = 28$ jednostek.

Z drugiej strony, piesek może te 28 jednostek przebiec: Najpierw z latarni nr 11 do 20 i potem z 20 do 1, zatryzmując się kolejno przy wszystkich poza 11.

---

8. Piesek Reksio

Odpowiedź: $60 \cdot 5 = 300$

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że mierzymy trasę w jednostkach 5-metrowych. Odcinek między sąsiednimi latarniami $j, j+1$ piesek przebywa wtedy i tylko wtedy, gdy jest jakaś latarnia $a \leqslant j$ i latarnia $b \geqslant j+1$, z których przy jednej właśnie stanął, a drugą wybrał za następny cel. Latarni na lewo od j (łącznie z j) jest j, latarni na prawo od $j+1$ (łącznie z $j+1$) jest $13-j$ i żadna latarnia nie jest oznaczona dwa razy, więc odcinek o końcach $j, j+1$ jest pokonywany co najwyżej $2\min(j, 11-j)$ razy. Rozważając wszytkie $j \leqslant 10$, otrzymujemy, że Reksio przebiegnie co najwyżej $2(1+2+3+4+5+5+4+3+2+1) = 60$ odcinków jednostkowych.

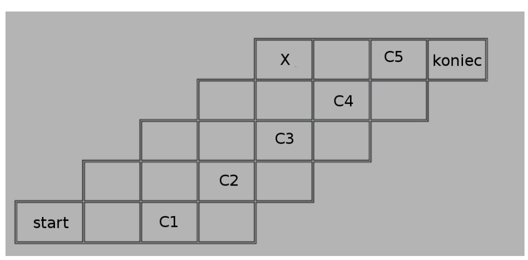
Z drugiej strony, piesek może te 60 jednostek przebiec: Wybiera na zmianę raz latarnię po lewej i raz po prawej, a każdym razem przebiega o jedną jednostkę więcej niż poprzednio, a gdy oznaczy wszystko poza latarnią 6, wtedy wraca do tej środkowej i ją oznacza. Przebiegnie $(1+2+\ldots+10)+5 = 60$ jednostek.

---

9. Szkoła na zboczu

Odpowiedź: 108

Rozwiązanie: Rekurenycyjnie względem liczby pięter. Niech a_n oznacza liczbę dróg dla szkoły o n poziomach (na każdym poziomie 4 sale). Szukamy a_5. Zauważmy, że a_i jest też liczbą takich dróg od startu do pola C_i, zaznaczonego dla $i = 1, 2, \ldots, 5$ na poniższym rysunku, że nie wchodzimy na poziom wyższy od i.



Dzielimy wszystkie drogi od pola „start" do pola „koniec" względem tego, na którym polu po raz pierwszy znaleźliśmy się na najwyższym poziomie. Jeśli stało się to na polu C_5 lub sąsiednim po lewej, to przeszliśmy przez C_4 (bez wchodzenia wcześniej na ostatni poziom). Zatem takich dróg mamy $2a_4$.

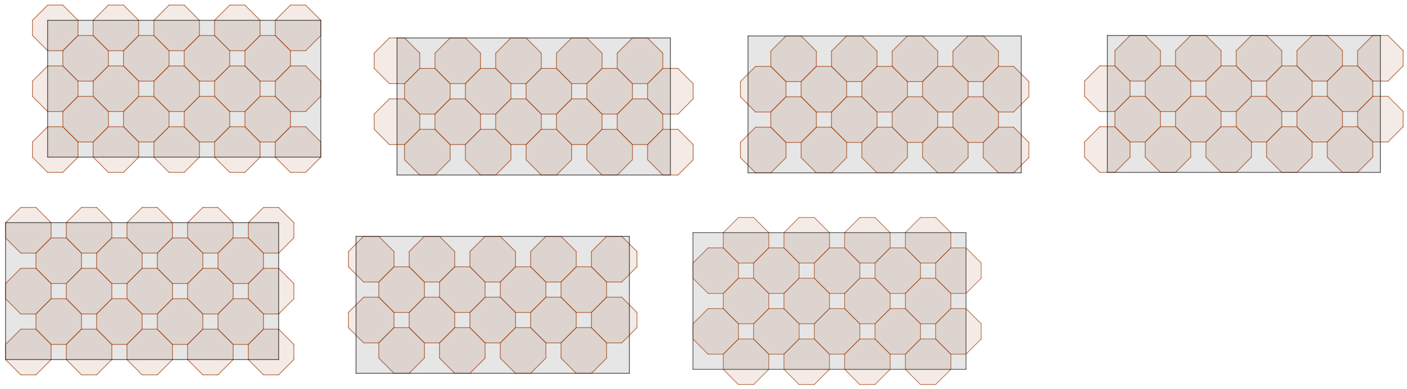
Załóżmy teraz, że pierwszym odwiedzonym polem na najwyższym poziomie był X (na rysunku). Rozważmy teraz przypadki, odtwarzając trasę od tyłu, jak wygląda droga od X do startu: wychodząc z X mogliśmy: albo najpierw odwiedzić C_3 i pójść z C_3 do startu (a_3 możliwości), albo ominąć C_3, dojść do C_2 i potem do startu (a_2 możliwości), albo ominąć C_3 i C_2, dojść do C_1 i potem do startu (a_1 możliwości), albo ominąć wszystkie C_i i dojść do startu (1 możliwość). Zatem dróg ze startu do X jest $a_3+a_2+a_1+1$ i wszystkie przechodzą przez dolnego sąsiada pola X. Każdą taką drogę możemy wydłużyć do pola „koniec" na 2 sposoby. Podsumowując, od startu do końca mamy $2a_4 + 2(a_3+a_2+a_1+1)$ dróg. Czyli $a_5 = 2(a_4+a_3+a_2+a_1+1)$.

Analogiczne rozumowanie daje $a_4 = 2(a_3+a_2+a_1+1)$, $a_3 = 2(a_2+a_1+1)$, $a_2 = 2(a_1+1)$, zaś widać, że $a_1 = 1$. Wyznaczamy kolejno: $a_2 = 4, a_3 = 12, a_4 = 36, a_5 = 108$. Jeszcze szybciej obliczymy a_5, jeśli zauważymy, że z podanych rekurencji wynika, że $a_n = 3a_{n-1}$ dla $n = 3, 4, 5$. Taka sama zależność zachodzi dla większych n, ale z lenistwa opisaliśmy ją tylko dla małych n.

---

10. Talerze

Rozwiązanie: Rozważmy ułożenia talerzy przedstawione na poniższych rysunkach:



Po naniesieniu niepokrytej przez każdy z układów talerzy część stołu na wspólnym rysunku (i oznaczeniu dziury w każdym z układów innym kolorem) widzimy, że te zbiory są rozłączne (patrz rysunek).

Ponieważ jest 7 układów i 6 plam, to z zasady szufladkowej wynika, że dla przynajmniej jednego układu na niezakrytej przez niego części nie ma plamy.