



Zadań jest 10. Czas na rozwiązywanie: 90 min. Czas na zadawanie pytań: 15 min.

1. W zamku grafa

W zamku grafa Koalburga mieszkają szpiegdy i rycerze. Każde wypowiedziane przez szpiegów zdanie jest kłamstwem, a każde zdanie wypowiedziane przez rycerzy jest prawdziwe. Czasem jednak graf Koalburg za zasługi pasuje szpiega na rycerza i oczywiście nowo pasowany rycerz przestaje kłamać. Rycerz natomiast nigdy nie może stać się szpiegiem. Mieszkańcy zamku wiedzą z kilkudniowym wyprzedzeniem, kto i kiedy zostanie pasowany na rycerza. Przybysze spoza zamku nie potrafią po wyglądzie odróżnić szpiegów od rycerzy. Wędrowny bard przybył do zamku i podczas wieczerzy poznał trzech jego mieszkańców: Alfreda, Beniamina i Cezarego. Beniamin powiedział mu, że cała ich trójka to szpiegdy. Natomiast Cezary stwierdził, że jutro rano ktoś z ich trójki zostanie pasowany na rycerza. Następnie bard został poproszony o występ, więc rozmowa została przerwana. Jednak następnego dnia popołudniu spotkał Alfreda ponownie i ten powiedział mu, że rano pasowano Cezarego na rycerza. Czy na podstawie tych wypowiedzi bard może stwierdzić, kim dokładnie jest (tzn. czy jest szpiegiem czy rycerzem)

- (a) Alfred?
- (b) Beniamin?
- (c) Cezary?

2. Ogród

Ogród ma kształt kwadratu o boku 8 m. Ogrodnik podzielił go na 8×8 kwadratów o boku 1 m, po czym w każdym z 64 środków kwadratów zrobił małą dołkę. Teraz zamierza wrzucić do każdej dołki po jednym nasionku. Ma w paczce mieszankę nasion 64 różnych roślin. Niektóre z roślin nie mogą rosnąć zbyt blisko siebie, bo sobie nawzajem szkodzą. Wiadomo, że dla każdego nasionka są co najwyżej dwa inne, które muszą być od niego posiane w odległości przynajmniej 2 m. Uzasadnicie, że dla dowolnej mieszanki 64 nasion spełniającej ten warunek istnieje dobre rozmieszczenie nasion w dołkach, to znaczy takie, że żadne dwie rośliny nie będą sobie szkodzić.

3. Monety na stos

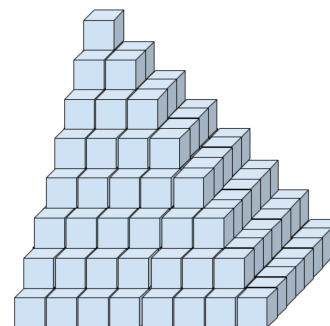
Na każdym polu nieskończonej szachownicy leży moneta. Traktujemy każdą z nich jako stos wysokości 1. W każdym ruchu można wybrać dwa stosy z pół sąsiadujących bokiem i przełożyć monetę z jednego stosu na drugi, przy czym nie wolno przekładać monety ze stosu wyższego na niższy. Wykonując serię tego typu ruchów, chcemy ułożyć jak najwyższy stos. Jaki najwyższy stos potraficie ułożyć?

4. Worki

Macie 8 worków, w każdym jest po 60 monet. Wszystkie monety wyglądają identycznie, jednak w 3 workach znajdują się wyłącznie fałszywe monety, a w 5 pozostałych – wyłącznie monety prawdziwe. Każda prawdziwa moneta waży 20 g, a każda fałszywa – 10 g. Nie wiecie, w których trzech workach są monety fałszywe, ale chcielibyście się tego dowiedzieć, wykonując jedno ważenie na wadze elektronicznej. Waga jest precyzyjna, można dzięki niej poznać dokładną wagę dowolnej liczby monet z worków. Waszym zadaniem jest zidentyfikować worki z fałszywymi monetami, ważąc jak najmniej monet. Im mniej monet użyjecie – tym lepiej. Dokładnie opiszcie, ile monet z którego worka wkładacie na wagę i dlaczego dzięki temu osiągniecie cel.

5. Piramida

Piramida na rysunku składa się z sześcianów ułożonych w 8 warstwach. Można policzyć, że są tu 204 sześciany.



Z ilu najmniej warstw powinna składać się podobna piramida, by sześcianów ją tworzących było co najmniej 2026?

6. Misiowe ciągi

Miś koala polubił nawiasy. Zanim je jednak schrupie, musi się upewnić, że są ułożone w odpowiedni sposób. Sekwencję nawiasów nazwiemy misiową, gdy spełnia wszystkie poniższe warunki:

- Każdy znak sekwencji jest nawiasem okrągłym lub kwadratowym, czyli jednym z czterech znaków: $(,), [,]$.
- Żadne dwa kolejne nawiasy nie są identyczne.
- Nawiasy można połączyć w pary w taki sposób, że każdemu otwierającemu nawiasowi odpowiada występujący na prawo od niego nawias zamykający (okrągłemu odpowiada okrągły, kwadratowemu – kwadratowy).
- Jeśli między jakąś parą, o której mowa wyżej, jest jakiś nawias, to odpowiadający mu nawias również znajduje się między wspomnianą parą.

Na przykład misiową sekwencją jest $(())$ czy $([()])$, a nie są misiowe np.: $(()$, $([$, $(())$.

Ile jest misiowych sekwencji złożonych z 8 znaków?

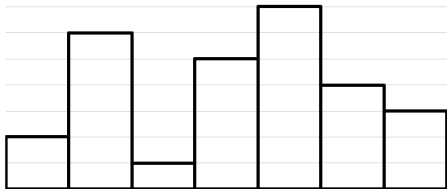
7. Czworokątny PIES

Dany jest czworokąt wypukły *PIES*, który nie jest trapezem. Oznaczmy przez a_1, b_1, c_1, d_1 proste, odpowiednio, PI, IE, ES, SP . Proste a_1 i a_2 są różne, równoległe do prostej a_1 i leżą po jej przeciwnej stronie niż czworokąt *PIES*. Analogicznie położone są trzy proste b_2, b_3, b_4 równoległe do b_1 , cztery proste c_2, c_3, c_4, c_5 równoległe do c_1 oraz pięć prostych d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 równoległe do d_1 .

Ile jest czworokątów, których każdy bok zawiera się w jednej z opisanych tu 18 prostych?

8. Spadki

Wombat ma prostopadłościennie klocki o wysokościach $1, 2, \dots, n$, po jednym każdego rodzaju. Ustawia je jeden za drugim, w dowolnej kolejności. Dla $n = 7$ mógłby uzyskać układ jak na rysunku.



Widzimy tu trzy spadki: z klocka wysokości 6 na klocek wysokości 1, z wysokości 7 na 4 i z wysokości 4 na 3.

Na ile sposobów wombat może ustawić swoje n klocków tak, by w ciągu ich wysokości

- był tylko jeden spadek?
- było dokładnie $n - 2$?

9. Bity

Maszyna n -Bit potrafi w jednym kroku zmienić jeden bit w n -bitowym ciągu. Czy możliwe jest uzyskanie za pomocą tej maszyny wszystkich możliwych ciągów n bitów, jeśli praca zaczyna się od ciągu, w którym na zmianę występują jedynki i zera (czyli $1010101\dots$) oraz na nim kończy, a każdy z innych ciągów występuje tylko raz?

10. Gra w łamane

Na płaszczyźnie są dwa czerwone, różne punkty X i Y . Ala i Barnaba wykonują ruchy na przemian, zaczyna Ala. Ruch polega na:

- narysowaniu najpierw łamanej łączącej pewne dwa czerwone (niekoniecznie różne) punkty, która ma co najmniej dwa odcinki oraz nie przecina już narysowanych łamanych ani samej siebie;
- następnie pomalowaniu jednego z wierzchołków narysowanej przez siebie łamanej, różnego od jej końców, na czerwono.

Jedynymi punktami wspólnymi łamanych mogą być ich końce, a żaden czerwony punkt nie może być końcem więcej niż trzech narysowanych odcinków. Na przykład, jeśli w pierwszym ruchu Ala połączy X i Y łamaną o dwóch odcinkach i pomaluje na czerwono jej wierzchołek Z , to Barnaba nie może narysować łamanej o obu końcach w Z , bo po jego ruchu z Z wychodziłyby cztery odcinki.

Przegrywa osoba, która nie może wykonać ruchu. Kto ma strategię wygrywającą?

Przez strategię wygrywającą rozumiemy sposób gry gwarantujący wygraną, niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik.

 SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. W zamku grafa

Odpowiedź: (a) szpieg (b) rycerz (c) rycerz

Rozwiązanie:

Rycerz nie mógłby powiedzieć, że wszyscy są szpiegami, więc Beniamin podczas wieczerzy musiał być szpiegiem. Co więcej, podczas wieczerzy wśród tej trójki był jeden lub dwóch rycerzy. Rozważmy dwa przypadki w zależności od tego, czy zdanie wypowiedziane przez Alfreda jest prawdziwe:

(a) Jest to zdanie prawdziwe.

Wówczas Alfred musi być rycerzem, Cezary też jest już rycerzem, ale podczas wieczerzy jeszcze nim nie był, więc kłamał. Ale to daje sprzeczność, bo Cezary powiedział wtedy, że ktoś zostanie pasowany na rycerza, co było prawdą.

(b) Jest to zdanie fałszywe.

Wówczas Alfred musi być szpiegiem i podczas wieczerzy też musiał być szpiegiem. Ale z ministrem wieczerzał przynajmniej jeden rycerz, więc musiał to być Cezary. Ponadto, rycerze nie mogą zmienić się w szpiegów, więc drugiego dnia Cezary dalej jest rycerzem.

Zatem zachodzi przypadek drugi, czyli drugiego dnia Alfred jest szpiegiem, a Cezary rycerzem. Ponadto, rycerz Cezary wypowiedział podczas wieczerzy prawdziwe zdanie, że następnego dnia ktoś z nich zostanie pasowany na rycerza. Nie mógł to być on sam (bo już był rycerzem), ani Alfred (bo ten dalej jest szpiegiem). Zatem pasowany został Beniamin.

2. Ogród

Rozwiązanie:

Dołki w ogrodzie nazwijmy sąsiednimi, jeśli odległość między nimi jest mniejsza niż 2 m. Rozważmy zasadzenie 64 nasion z najmniejszą liczbą par złych, czyli par nasion, które sobie szkodzą i są w sąsiednich dołkach. Załóżmy nie wprost, że liczba złych par jest dodatnia. Popatrzmy na złą parę nasion A, B . Poszukajmy nowego miejsca dla B . Dołek d_B z nasionkiem B ma najwyżej 8 sąsiadów, nasiona w tych sąsiednich dołkach mają łącznie najwyżej $8 \cdot 2 = 16$ nasion im szkodzących. Chcemy zastąpić B innym nasionkiem, które nie będzie szkodzić otoczeniu dołka d_B . Oznaczmy przez Z zbiór nasion poza nasionkami: w dołku d_B , jego sąsiadach i szkodzącym owym sąsiadom. Mamy $|Z| \geq 64 - 16 - 8 - 1 = 47$. W zbiorze Z są co najwyżej dwa nasiona, którym szkodzi B , a ogrodowe sąsiedztwo tych dwóch nasion liczy co najwyżej $2 \cdot 8 = 16$ dołków. W tych dołkach nie chcemy posadzić B . Mamy zatem przynajmniej $47 - 16 = 31$ dołków bezpiecznych dla B . Wybieramy jeden z nich, powiedzmy z nasionkiem C i zamieniamy nasionka B i C miejscami. W ten sposób zmniejszyliśmy przynajmniej o 1 liczbę złych par nasion (zniknęła zła para A, B , zaś nowa nie pojawiła się) – sprzeczność z minimalnością liczby złych par.

Uwaga: Można zinterpretować grafowo. Mamy graf o 64 wierzchołkach, którego każda składowa jest cyklem lub ścieżką. Chcemy ponumerować wierzchołki parami liczb $(x, y) \in [8]^2$ tak, by przyległe wierzchołki miały różnicę przynajmniej 2 na przynajmniej jednej współrzędnej. Można takie przyporządkowanie zrobić ręcznie, ale nie będziemy go tu przedstawiać.

3. Monety na stos

Odpowiedź: co najmniej 32

Rozwiązanie:

0040

Najpierw, manewrując w pięciu wierszach, doprowadzamy do pozycji z liczbami monet

0130

jak widać obok. Potem wszystkie stopniowo zrzucamy do pola z czterema monetami i

1120

otrzymujemy stos 16 monet. Symetrycznie robimy po drugiej stronie planszy, na końcu

111

dwa sąsiadujące stosy 16 monet łączymy w stos wysokości 32. Nie wiem, czy można lepiej.

1

4. Worki

Odpowiedź: Wystraczy 95 monet. Nie wiem, czy można lepiej.

Rozwiązanie:

Po zważeniu n monet będziemy znać sumę wag monet z fałszywych worków, bo jest to różnica między $20n$ a wskazaniem wagi. Znamy wagę każdej fałszywej, więc dowiemy się, ile fałszywych monet wzięliśmy. Zatem liczby x_i monet brane z i -tego worka pozwalają osiągnąć cel wtedy i tylko wtedy, gdy suma każdej trójki $x_i + x_j + x_k$ (dla różnych i, j, k) jest inna. Przykładowe dobre osiem liczb: 0, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44. Ciąg powstał tak, że do 0, 1, 2, 4 dokładamy kolejno sumę trzech ostatnich liczb. Wystarczy zatem 95 monet. Nie wiem, czy można lepiej.

5. Piramida

Odpowiedź: 18

Rozwiązanie:

W piramidzie wysokości n mamy $\sum_{k=1}^n k^2$ klocków. Dzieci mogą kolejno sprawdzać sumy kwadratów na kalkulatorze i wyjdzie im, że dla $n = 17$ jest 1785 klocków, a dla $n = 18$ są 2223 klocki. Jeśli znają wzór na sumę kwadratów $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, to mają łatwiej.

6. Misiowe ciągi

Odpowiedź: 72

Rozwiązanie:

Stwórzmy dwie tabelki, których użyjemy do obliczenia odpowiedzi. $W[n]$ oznacza liczbę sekwencji o n znakach. $F[n]$ oznacza liczbę sekwencji o n znakach, w których pierwszym znakiem jest ‘(’ oraz ostatnim ‘)’.

Możemy ułożyć następujące rekurencyjne zależności:

$$W[n] = 2 \sum_{k=0,2|k}^{n-2} F[k] \cdot W[n-2-k]$$

$$F[n] = \sum_{k=0,2|k}^{n-2} F[k] \cdot \max(W[n-2-k]/2, 1).$$

Parę słów wyjaśnienia odnośnie drugiego wyrażenia. Zapisujemy je jako $(A)B$. A musi zaczynać i kończyć się kwadratowymi nawiasami mamy więc $F[k]$. B musi kończyć się nawiasem $)$. Dzięki symetrii dokładnie połowa wyrażen o $n-2-k > 0$ znakach kończy się $)$. Jednak jeśli $n-2-k = 0$, to mamy dokładnie jedno wyrażenie – pusty ciąg.

Następnie używamy ich do obliczenia kolejnych wartości, zaczynając od $W[0] = F[0] = 1$.

n	$W[n]$	$F[n]$
0	1	1
2	2	1
4	6	2
6	20	6
8	72	21

Odpowiedzią jest $W[8] = 72$.

7. Czworokątny PIES

Odpowiedź: 2598

Rozwiązanie:

Każdy taki czworokąt można uzyskać przez wybór czterech z opisanych 18 prostych, jeśli żadne trzy z nich nie będą równoległe. Wybory trzech równoległych można rozbić na 4 przypadki w zależności od ich kierunku, przy czym jeżeli prostych o danym kierunku jest więcej niż 3, rozważmy podprzypadki; kiedy wybrane są dokładnie 3 i kiedy dokładnie 4. Wychodzi liczba czworokątów:

$$\binom{18}{4} - \left(1 \cdot 15 + \left(\binom{4}{3} \cdot 14 + 1 \right) + \left(\binom{5}{3} \cdot 13 + \binom{5}{4} \right) + \binom{6}{3} \cdot 12 + \binom{6}{4} \right) = 2598$$

8. Spadki

Odpowiedź: $2^n - n - 1$ w obu przypadkach

Rozwiązanie:

Układów z $n - 2$ spadkami jest tyle samo co z jednym spadkiem – każdy można odczytać od końca, uzyskując wzajemnie jednoznacznie wszystkie układy z jednym spadkiem. Policzmy zatem układy z jednym spadkiem.

Każdy taki układ można wzajemnie jednoznacznie wygenerować, wybierając zbiór klocków stojących przed spadkiem, jeśli tylko nie okaże się, że jest to zbiór postaci $\{1, 2, \dots, k\}$ lub zbiór pusty (bo wtenczas bezpośrednio po nim nie da się uzyskać spadku) – wówczas układamy rosnąco jego elementy, a za nimi rosnąco pozostałe. Np. dla $n = 7$ i wyboru zbioru $\{2, 5, 6\}$ otrzyma się układ 2, 5, 6, 1, 3, 4, 7. Odpowiedź jest zatem liczbą podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ pomniejszoną o $n + 1$, bo k w powyższym rozumowaniu może być dowolne z $\{1, 2, \dots, n\}$ i doliczamy zbiór pusty. Wychodzi $2^n - n - 1$.

9. Bity

Odpowiedź: tak

Rozwiązanie:

[Znana konstrukcja kodów Graya.]

Przez mniej lub bardziej formalną indukcję można udowodnić, że taki cykl istnieje, dla wygody zaczynając od układu z samych zer (co oznacza, że istnieje również cykl szukany w zadaniu). Oczywiście cykl taki istnieje dla $n = 1$. Załóżmy, że mamy cykl dla n , czyli $a_1 = (0, 0, \dots, 0), a_2, \dots, a_{2^n}$ (ostatni wyraz różni się jednym bitem od pierwszego). Do każdego z ciągów a_1, a_2, \dots, a_{2^n} dopisujemy z przodu 0, a następnie skonstruujemy kolejno ciągi $a_{2^n}, a_{2^n-1}, \dots, a_1$ z dopisaną z przodu jedyneką. Tak uzyskamy szukany cykl dla $n + 1$.

10. Gra w łamane

Odpowiedź: gracz drugi

Rozwiązanie:

Rozważmy dwa przypadki pierwszego ruchu Ali.

- Robi krzywą zamkniętą (pętlę) o końcach w X i maluje na czerwono Z . Wtedy Barnaba łączy X z Z krzywą biegnącą w innym obszarze niż Y . Druga runda – analogicznie, bo Ala musi zrobić pętlę o końcach Y . Gra kończy po 2 rundzie.
- Łączy X z Y i maluje na czerwono Z . Wtedy Barnaba łączy X z Y i maluje Z' . Z dokładnością do izomorfizmu Ala ma teraz dwa ruchy, po każdym z nich Barnaba łączy łamaną wierzchołki tak, by pozostały tylko dwa wierzchołki stopnia dwa, ale w różnych obszarach. Gra kończy się po 2 rundzie.

Dla ciekawych wszystkich możliwości w grze – rys. obok.

