KoALa (KOmbinatoryka-Algorytmika-Logika), Wrocław, 16 VI 2023

Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
V Liceum Ogólnokształcące im. Klaudyny Potockiej w Poznaniu
Fundacja Matematyków Wrocławskich
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

MECZ SPARINGOWY DOLNY ŚLĄSK – WIELKOPOLSKA

Zad. 1. ***Fobosowy katar***

W stacji kosmicznej Kosmokoala żyje 100000 kolonizatorów. Pewnego dnia jeden z nich złapał fobosowy katar. Jest to choroba, która rozwija się według następujących zasad:

(a) następnego dnia po zarażeniu chora osoba zaczyna zarażać.

(b) Każda chora osoba codziennie zaraża dwie inne osoby, dopóki jest to możliwe. Ostatniego dnia zarażania zarażeni zostaną wszyscy możliwi mieszkańcy stacji.

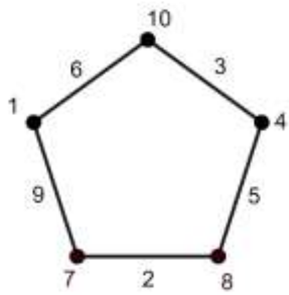
(c) Szóstego dnia po zarażeniu chora osoba zdrowieje i przestaje zarażać innych (w szczególności szóstego dnia taka osoba nikogo już nie zaraża).

(d) Żadna osoba, która wcześniej chorowała na fobosowy katar, nie może zarazić się powtórnie.

Którego dnia od zarażenia pierwszego kolonizatora zachorowało najwięcej osób? Ile to było osób?

Zad. 2. ***Magiczny pięciokąt***

Na rysunku obok widzimy przykład pięciokąta magicznego: liczby naturalne od 1 do 10 ułożone są na 5 wierzchołkach i 5 bokach tak, że suma trzech liczb wzdłuż każdego boku jest taka sama. Na rysunku suma ta wynosi 17. Czy można przestawić te liczby tak, aby pięciokąt pozostał magiczny, ale dla sumy mniejszej niż 17? Jeśli tak, to jaka jest najmniejsza możliwa suma? Pamiętajcie, aby uzasadnić, że mniejszej sumy być nie może.



Zad. 3. ***Problem NP***

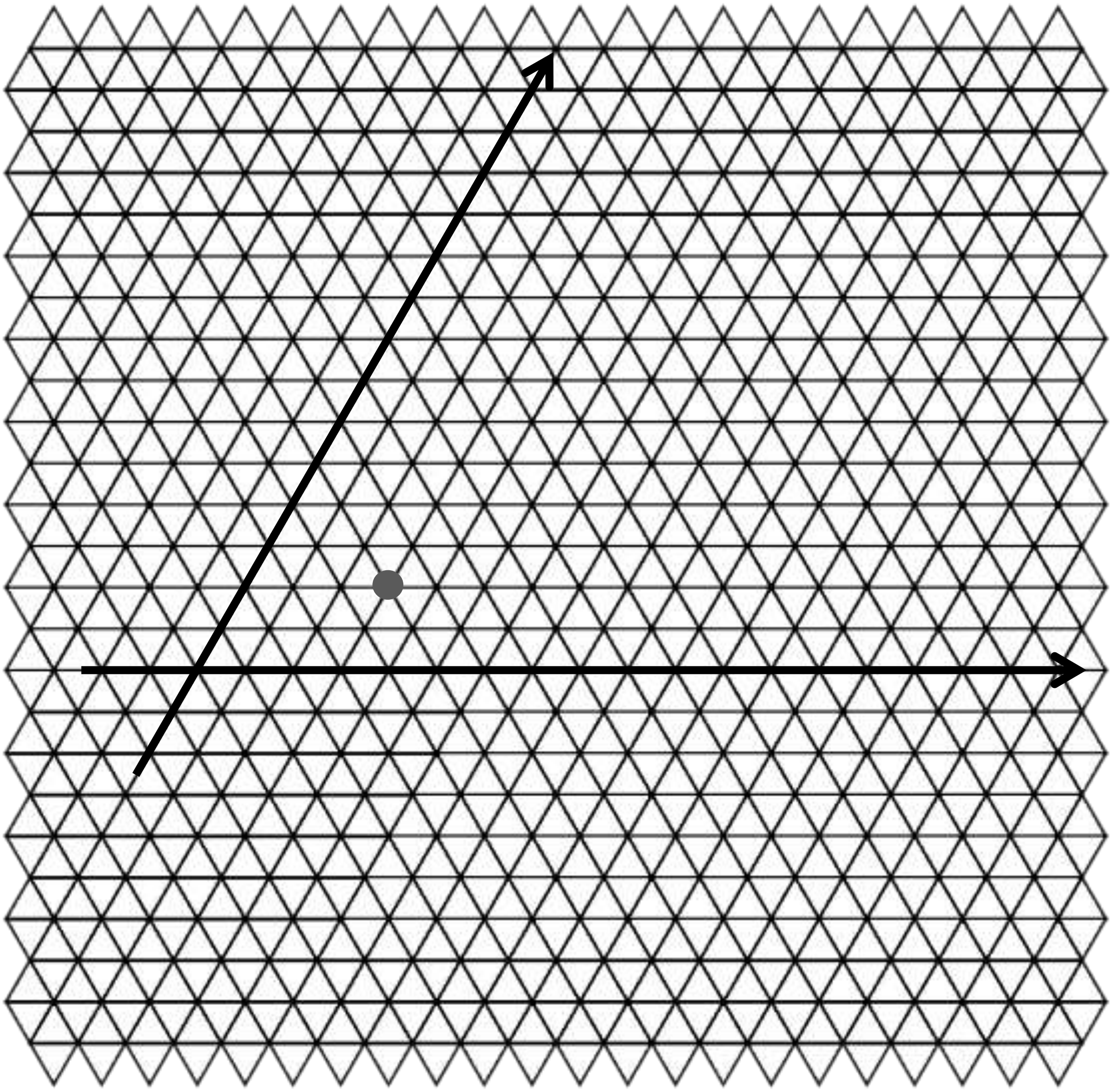
W wierzchołku n-kątnego graniastosłupa siedzi Niespokojna Pchła i zaczyna co sekundę przeskakiwać do wierzchołka połączonego krawędzią z tym, z którego wówczas wyskakuje, wybierając cel za każdym razem losowo. Znajdź w zależności od n wszystkie takie k, że k-ty skok NP może zakończyć się w każdym wierzchołku.

Zad. 4. ***Bez strat?***

Gosia ma czarną skrzynkę-maszynkę. Przekształca ona dowolny podany jej ciąg* liter polskiego alfabetu na ciąg* liter polskiego alfabetu, niekoniecznie inny niż wejściowy, ale na pewno tak, że z różnych ciągów uzyska się różne. Udowodnij, że jeśli efektem działania skrzynki Gosi na jakimś ciągu x jest ciąg o długości mniejszej od długości x, to istnieje taki ciąg y, że efekt jej działania na y jest ciągiem o długości większej niż długość y.

* Przyjmujemy, że ciąg musi składać się z co najmniej jednej litery i ma skończoną długość.

Zad. 5. ***Krzywy układ***



Płaszczyznę „wyparkietowano” trójkątami równobocznymi o boku 1 i wprowadzono układ współrzędnych jak na rysunku (osie pogrubiono), tak że np. szara kropka oznacza punkt (3, 2). Odległości będziemy mierzyć, chodząc po krawędziach tego nieskończonego grafu, czyli równolegle do osi, tzn. np. punkt (3, 2) jest odległy od (0, 0) o 5, a od (2, 3) o 1.

Punkt A ma współrzędne (2023, 1000), B – współrzędne (44, 101), C – współrzędne (101, 2023), a D – współrzędne (1001, 44).

Które punkty kratowe (o obu współrzędnych całkowitych) mają najmniejszą sumę odległości od punktów A, B, C i D i ile ich jest? Ile wynosi ta suma?

Zad. 6. ***Biurokracja***

W Urzędzie Spraw Urzędowych jest 10 ponumerowanych okienek. Obsługa petenta zaczyna się od pierwszego okienka i przejście do każdego kolejnego okienka wymaga załatwienia formalności w poprzednim. Formalności w każdym okienku polegają na wypełnieniu formularza RODO i ewentualnym pobraniu pewnej liczby zaświadczeń, a czas obsługi jest proporcjonalny do liczby pobranych zaświadczeń. Zaświadczenia mogą być następnie złożone w kolejnych okienkach, co pozwala na ich pominięcie (wówczas w takim okienku nie trzeba wypełniać formularza, ale nie można też pobrać z niego zaświadczeń). Czas obsługi w kolejnych okienkach opisuje poniższa tabela.

Numer okienka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Czas wypełniania formularza [min]	3	6	9	12	14	16	18	20	21	22
Czas wydania jednego zaświadczenia [min]	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Potrzebujesz zaświadczenia o biegłości w algorytmice, wydawanego w dziesiątym okienku. Jaki jest najkrótszy czas potrzebny, by je zdobyć?

Przykładowa (niekoniecznie najlepsza) trasa petenta może wyglądać następująco:

• w pierwszym okienku pobiera 3 zaświadczenia;

• przez okienka nr 2 i 3 przechodzi bez pobierania zaświadczeń;

• wykorzystuje zaświadczenia do pominięcia okienek nr 4, 5 i 6;

• w okienku nr 7 pobiera 2 zaświadczenia;

• wykorzystuje zaświadczenia do pominięcia okienek nr 8 i 9;

• podchodzi do okienka 10 i pobiera zaświadczenie.

Na jej przebycie potrzebowałby $(3 + 3 \cdot 10) + 6 + 9 + (18 + 2 \cdot 4) + 22 + 1 = 97$ minut.

Zad. 7. ***Palindromiczna podzielność***

Palindromem nazywamy zapis, który wygląda tak samo czytany od tyłu, np. KAJAK, ANNA, 2222.

Ile jest wielokrotności trójki, których zapis czwórkowy jest 21-cyfrowym palindromem?

Zad. 8. ***Patycz(a)ki***

Adaś i Basia grają w następującą grę, wykonując ruchy na przemian.

Na stole leżą początkowo 2023 patyczki. Ruch polega na zabraniu jednego patyczka, trzech lub czterech. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Zaczyna Adaś.

Czy któreś z nich ma strategię wygrywającą, a jeśli tak, to jaką? Uzasadnijcie odpowiedź!

A czy i ewentualnie jak zmieniłyby się odpowiedzi, gdyby początkową liczbą patyczków byłoby 10^{101}?

Zad. 9. ***Suma ciągu***

Koala i Wombat grają w grę, w której do wygrania jest 100 liści eukaliptusa. Zadaniem Wombata jest wypisanie w tajemnicy przed Koalą ciągu 25 cyfr z zakresu od 1 do 9 zgodnie z następującymi zasadami:

- pierwsze dwie cyfry mogą być dowolne, ale nie mogą obie być podzielne przez 3;
- każda następna cyfra jest wyznaczana w ten sposób, że sumujemy dwie poprzednie cyfry, a jeśli ta suma będzie większa od 9, to odejmujemy od niej 9 (przykładowo, jeśli ciąg zaczynałby się od 1, 6, to dwiema kolejnymi cyframi byłyby 7 i 4).

Następnie Koala może wybrać dowolną pozycję i zapytać Wombata, jaka cyfra na niej stoi. Wombat musi odpowiedzieć na to pytanie zgodnie z prawdą. Zadaniem Koali jest zgadnięcie, jaka jest suma wszystkich cyfr w ciągu zapisanym przez Wombata.

Jeśli poda dokładną wartość, to otrzyma 100 liści eukaliptusa. Gdy pomyli się o x, gdzie x jest liczbą mniejszą od 100, to otrzyma $100 - x$ liści, a jeśli pomyli się o więcej, nie dostanie nic.

Znajdźcie jak największą liczbę k o tej własności, że Koala ma sposób gry gwarantujący, że wygra co najmniej k liści, niezależnie od tego, jaki ciąg wypisze Wombat. Nie zapomnijcie o uzasadnieniu, że znaleziona liczba jest rzeczywiście największa.

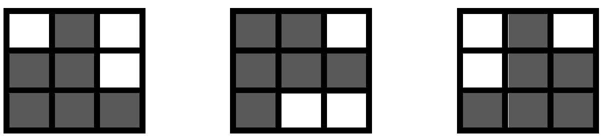
Zad. 0. ***Podwójnie ząbkowane***

Rozważmy czekoladę $n \times n$, złożoną z n^2 różnych kostek, dla $n \geq 3$. Zbiór złożony z wybranych kostek czekolady nazywamy podwójnie ząbkowanym, jeśli spełnia dwa warunki:

- można go pociąć poziomymi cięciami wzdłuż rowków czekolady na n pasków o długościach $1, 2, \ldots, n$, po jednym w każdym „wierszu”;
- można go pociąć pionowymi cięciami wzdłuż rowków czekolady na n pasków o długościach $1, 2, \ldots, n$, po jednym w każdej „kolumnie”.

Uzasadnijcie, że zbiorów podwójnie ząbkowanych jest nie więcej niż $4^n - 1$.

Na rysunku zaznaczono na szaro trzy przykładowe zbiory podwójnie ząbkowane dla czekolady 3×3.



Uważamy je za różne, mimo że drugi powstał z pierwszego przez obrót, a trzeci – przez odbicie symetryczne.