KoALa (KOmbinatoryka-Algorytmika-Logika), Wrocław, 16 VI 2023

Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej

V Liceum Ogólnokształcące im. Klaudyny Potockiej w Poznaniu

Fundacja Matematyków Wrocławskich

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

MECZ SPARINGOWY DOLNY ŚLĄSK – WIELKOPOLSKA

Zad. 1. ***Fobosowy katar***

W stacji kosmicznej Kosmokoala żyje 100000 kolonizatorów. Pewnego dnia jeden z nich złapał fobosowy katar. Jest to choroba, która rozwija się według następujących zasad:

(a) następnego dnia po zarażeniu chora osoba zaczyna zarażać.

(b) Każda chora osoba codziennie zaraża dwie inne osoby, dopóki jest to możliwe. Ostatniego dnia zarażania zarażeni zostaną wszyscy możliwi mieszkańcy stacji.

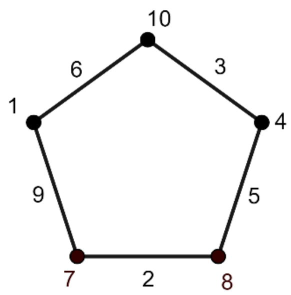
(c) Szóstego dnia po zarażeniu chora osoba zdrowieje i przestaje zarażać innych (w szczególności szóstego dnia taka osoba nikogo już nie zaraża).

(d) Żadna osoba, która wcześniej chorowała na fobosowy katar, nie może zarazić się powtórnie.

Którego dnia od zarażenia pierwszego kolonizatora zachorowało najwięcej osób? Ile to było osób?

Zad. 2. ***Magiczny pięciokąt***

Na rysunku obok widzimy przykład pięciokąta magicznego: liczby naturalne od 1 do 10 ułożone są na 5 wierzchołkach i 5 bokach tak, że suma trzech liczb wzdłuż każdego boku jest taka sama. Na rysunku suma ta wynosi 17. Czy można przestawić te liczby tak, aby pięciokąt pozostał magiczny, ale dla sumy mniejszej niż 17? Jeśli tak, to jaka jest najmniejsza możliwa suma? Pamiętajcie, aby uzasadnić, że mniejszej sumy być nie może.



Zad. 3. ***Problem NP***

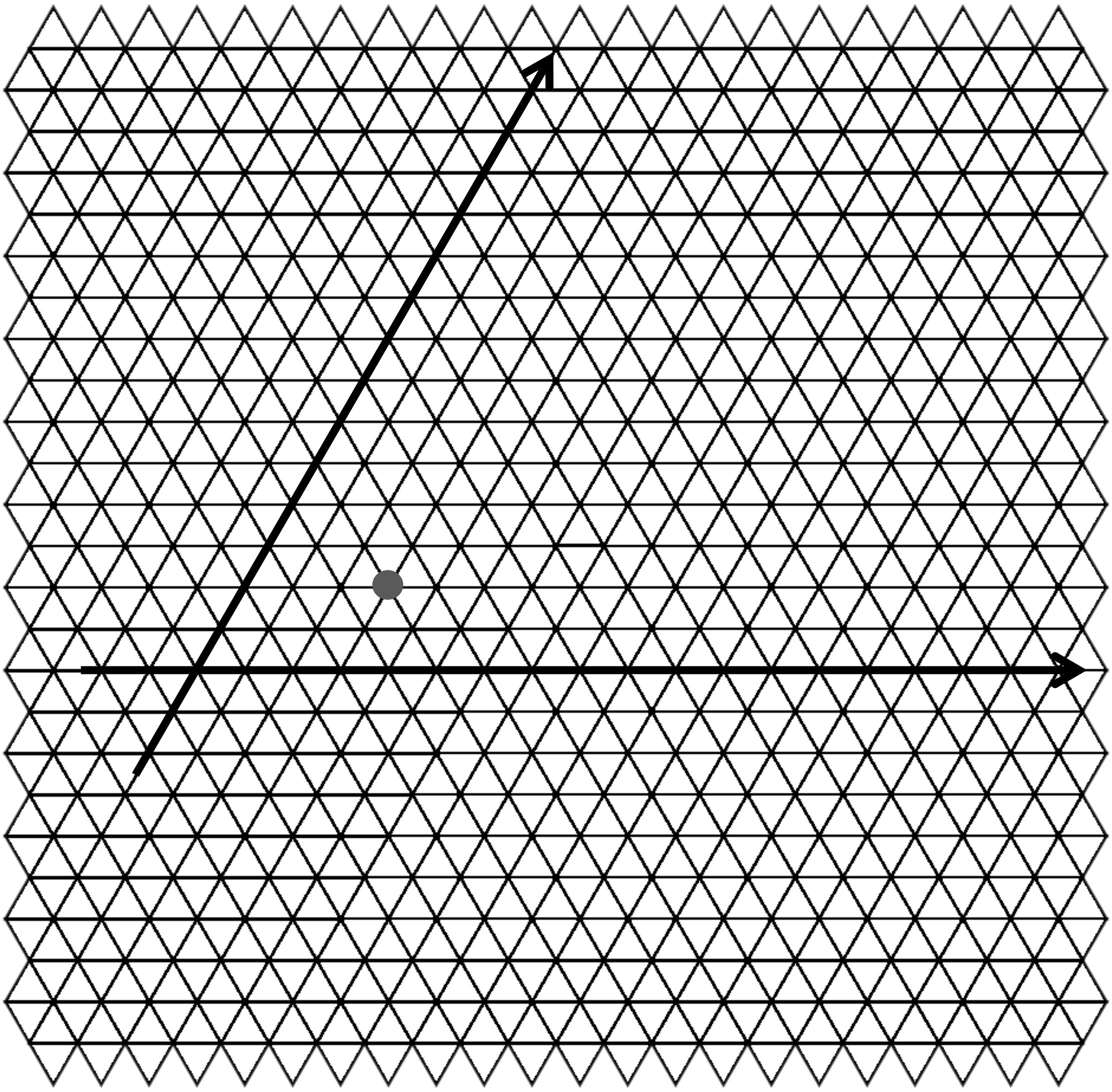
W wierzchołku n-kątnego graniastosłupa siedzi Niespokojna Pchła i zaczyna co sekundę przeskakiwać do wierzchołka połączonego krawędzią z tym, z którego wówczas wyskakuje, wybierając cel za każdym razem losowo. Znajdź w zależności od n wszystkie takie k, że k-ty skok NP może zakończyć się w każdym wierzchołku.

Zad. 4. ***Bez strat?***

Gosia ma czarną skrzynkę-maszynkę. Przekształca ona dowolny podany jej ciąg* liter polskiego alfabetu na ciąg* liter polskiego alfabetu, niekoniecznie inny niż wejściowy, ale na pewno tak, że z różnych ciągów uzyska się różne. Udowodnij, że jeśli efektem działania skrzynki Gosi na jakimś ciągu *x* jest ciąg o długości mniejszej od długości *x*, to istnieje taki ciąg *y*, że efekt jej działania na *y* jest ciągiem o długości większej niż długość *y*.

* Przyjmujemy, że ciąg musi składać się z co najmniej jednej litery i ma skończoną długość.

Zad. 5. ***Krzywy układ***



Płaszczyznę „wyparkietowano” trójkątami równobocznymi o boku 1 i wprowadzono układ współrzędnych jak na rysunku (osie pogrubiono), tak że np. szara kropka oznacza punkt (3, 2). Odległości będziemy mierzyć, chodząc po krawędziach tego nieskończonego grafu, czyli równolegle do osi, tzn. np. punkt (3, 2) jest odległy od (0, 0) o 5, a od (2, 3) o 1.

Punkt *A* ma współrzędne (2023, 1000), *B* – współrzędne (44, 101), *C* – współrzędne (101, 2023), a *D* – współrzędne (1001, 44).

Które punkty kratowe (o obu współrzędnych całkowitych) mają najmniejszą sumę odległości od punktów *A*, *B*, *C* i *D* i ile ich jest? Ile wynosi ta suma?

Zad. 6. ***Biurokracja***

W Urzędzie Spraw Urzędowych jest 10 ponumerowanych okienek. Obsługa petenta zaczyna się od pierwszego okienka i przejście do każdego kolejnego okienka wymaga załatwienia formalności w poprzednim. Formalności w każdym okienku polegają na wypełnieniu formularza RODO i ewentualnym pobraniu pewnej liczby zaświadczeń, a czas obsługi jest proporcjonalny do liczby pobranych zaświadczeń. Zaświadczenia mogą być następnie złożone w kolejnych okienkach, co pozwala na ich pominięcie (wówczas w takim okienku nie trzeba wypełniać formularza, ale nie można też pobrać z niego zaświadczeń). Czas obsługi w kolejnych okienkach opisuje poniższa tabela.

Numer okienka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Czas wypełniania formularza [min]	3	6	9	12	14	16	18	20	21	22
Czas wydania jednego zaświadczenia [min]	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Potrzebujesz zaświadczenia o biegłości w algorytmice, wydawanego w dziesiątym okienku. Jaki jest najkrótszy czas potrzebny, by je zdobyć?

Przykładowa (niekoniecznie najlepsza) trasa petenta może wyglądać następująco:

• w pierwszym okienku pobiera 3 zaświadczenia;

• przez okienka nr 2 i 3 przechodzi bez pobierania zaświadczeń;

• wykorzystuje zaświadczenia do pominięcia okienek nr 4, 5 i 6;

• w okienku nr 7 pobiera 2 zaświadczenia;

• wykorzystuje zaświadczenia do pominięcia okienek nr 8 i 9;

• podchodzi do okienka 10 i pobiera zaświadczenie.

Na jej przebycie potrzebowałby $(3 + 3 \cdot 10) + 6 + 9 + (18 + 2 \cdot 4) + 22 + 1 = 97$ minut.

Zad. 7. ***Palindromiczna podzielność***

Palindromem nazywamy zapis, który wygląda tak samo czytany od tyłu, np. KAJAK, ANNA, 2222.

Ile jest wielokrotności trójki, których zapis czwórkowy jest 21-cyfrowym palindromem?

Zad. 8. ***Patycz(a)ki***

Adaś i Basia grają w następującą grę, wykonując ruchy na przemian.

Na stole leżą początkowo 2023 patyczki. Ruch polega na zabraniu jednego patyczka, trzech lub czterech. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Zaczyna Adaś.

Czy któreś z nich ma strategię wygrywającą, a jeśli tak, to jaką? Uzasadnijcie odpowiedź!

A czy i ewentualnie jak zmieniłyby się odpowiedzi, gdyby początkową liczbą patyczków byłoby 10^{101}?

Zad. 9. ***Suma ciągu***

Koala i Wombat grają w grę, w której do wygrania jest 100 liści eukaliptusa. Zadaniem Wombata jest wypisanie w tajemnicy przed Koalą ciągu 25 cyfr z zakresu od 1 do 9 zgodnie z następującymi zasadami:

- pierwsze dwie cyfry mogą być dowolne, ale nie mogą obie być podzielne przez 3;
- każda następna cyfra jest wyznaczana w ten sposób, że sumujemy dwie poprzednie cyfry, a jeśli ta suma będzie większa od 9, to odejmujemy od niej 9 (przykładowo, jeśli ciąg zaczynałby się od 1, 6, to dwiema kolejnymi cyframi byłyby 7 i 4).

Następnie Koala może wybrać dowolną pozycję i zapytać Wombata, jaka cyfra na niej stoi. Wombat musi odpowiedzieć na to pytanie zgodnie z prawdą. Zadaniem Koali jest zgadnięcie, jaka jest suma wszystkich cyfr w ciągu zapisanym przez Wombata.

Jeśli poda dokładną wartość, to otrzyma 100 liści eukaliptusa. Gdy pomyli się o x, gdzie x jest liczbą mniejszą od 100, to otrzyma $100 - x$ liści, a jeśli pomyli się o więcej, nie dostanie nic.

Znajdźcie jak największą liczbę k o tej własności, że Koala ma sposób gry gwarantujący, że wygra co najmniej k liści, niezależnie od tego, jaki ciąg wypisze Wombat. Nie zapomnijcie o uzasadnieniu, że znaleziona liczba jest rzeczywiście największa.

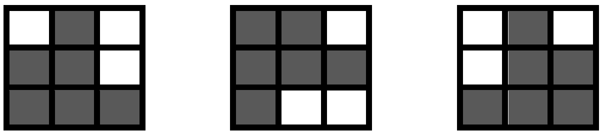
Zad. 0. ***Podwójnie ząbkowane***

Rozważmy czekoladę $n \times n$, złożoną z n^2 różnych kostek, dla $n \geq 3$. Zbiór złożony z wybranych kostek czekolady nazywamy podwójnie ząbkowanym, jeśli spełnia dwa warunki:

- można go pociąć poziomymi cięciami wzdłuż rowków czekolady na n pasków o długościach $1, 2, \ldots, n$, po jednym w każdym „wierszu";
- można go pociąć pionowymi cięciami wzdłuż rowków czekolady na n pasków o długościach $1, 2, \ldots, n$, po jednym w każdej „kolumnie".

Uzasadnijcie, że zbiorów podwójnie ząbkowanych jest nie więcej niż $4^n - 1$.

Na rysunku zaznaczono na szaro trzy przykładowe zbiory podwójnie ząbkowane dla czekolady 3×3.



Uważamy je za różne, mimo że drugi powstał z pierwszego przez obrót, a trzeci – przez odbicie symetryczne.

KoALa (KOmbinatoryka-Algorytmika-Logika), Wrocław, 16 VI 2023

MECZ SPARINGOWY DOLNY ŚLĄSK – WIELKOPOLSKA

ROZWIĄZANIA

(do użytku wewnętrznego)

Zad. 1. ***Fobosowy katar***

Wprowadźmy następujące ciągi:

a_i – łączna liczba kolonizatorów, którzy są chorzy i-tego dnia,

b_i – łączna liczba kolonizatorów, którzy zachorowali i-tego dnia,

c_i – łączna liczba kolonizatorów, którzy wyzdrowieli i-tego dnia,

d_i – łączna liczba kolonizatorów, którzy i-tego dnia są zakażeni lub są ozdrowieńcami.

Z treści zadania wynika, że $a_1 = b_1 = d_1 = 1$ oraz $c_i = 0$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Ponadto dla $i \in \{2, \ldots, 6\}$ $b_i = 2a_{i-1}$, $a_i = a_{i-1} + b_i = 3\,a_{i-1}$ oraz $d_i = a_i$, natomiast dla $i > 6$ mamy: $c_i = b_{i-6}$, $b_i = 2(a_{i-1} - c_i)$, $a_i = a_{i-1} - c_i + b_i = 3(a_{i-1} - c_i)$ oraz $d_i = a_i + \sum_{j=1}^{i} c_j$.

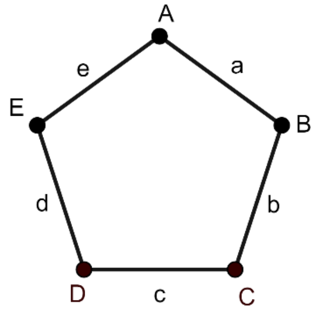
Wzory te obowiązują, dopóki $d_i < 100000$.

Korzystając z tych wzorów, możemy wyliczyć wartości ciągów:

Dzień	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1	1	0	1
2	3	2	0	1
3	9	6	0	9
4	27	18	0	27
5	81	54	0	81
6	243	162	0	243
7	726	484	1	727
8	2172	1448	2	2175
9	6498	4332	6	6507
10	19440	12960	18	19467
11	58158	38772	54	58239
12	173988	115992	162	174231

Ale ostatnią linijkę musimy zmodyfikować, bo w Kosmokoali żyje tylko 100000 osób, więc $d_{12} = 100000$, $b_{12} = 100000 - d_{11} - c_{12} = 41599$. Zatem widzimy, że najwięcej osób zakaziło się w dniu nr 12 (11 dni po zakażeniu pierwszego kolonizatora) i było to 41599 osób.

Zad. 2. ***Magiczny pięciokąt***



Pokażemy najpierw, że nie da się uzyskać sumy mniejszej niż 14.
Oznaczmy liczby wpisywane na wierzchołkach i bokach pięciokąta jak na rysunku obok.

Przez x oznaczmy sumę liczb wzdłuż jednego boku. Wtedy:

$5x = 2(A + B + C + D + E) + (a + b + c + d + e) =$

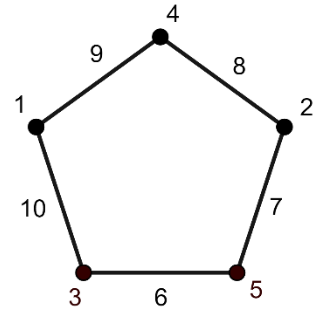
$= A + B + C + D + E + (A + B + C + D + E + a + b + c + d + e) =$

$= A + B + C + D + E + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = A + B + C + D + E + 55.$

Ponadto wszystkie wpisywane liczby muszą być różne i z zakresu od 1 do 10, więc: $A + B + C + D + E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Ale to oznacza, że $5x \geq 15 + 55 = 70$, skąd $x \geq 14$.

Teraz wystarczy pokazać, że faktycznie da się tak ułożyć liczby, aby suma była równa 14. Obok przykładowy pięciokąt magiczny o takiej sumie.



Zad. 3. ***Problem NP***

Jeśli n jest parzyste, to wierzchołki graniastosłupa można „pokolorować” zero-jedynkowo tak, żeby każde dwa połączone krawędzią miały różne kolory, a punkt początkowy NP był oznaczony 0. Wówczas w punktach oznaczonych 0 Pchła może znaleźć się tylko po parzyście wielu skokach, a w jedynkach – po nieparzyście, nie istnieje więc k, o jakim mowa w zadaniu.

Gdy n jest nieparzyste, to po jednym skoku NP znajdzie się w jakimś wierzchołku odległym od punktu startowego o jedną krawędź, po dwóch – w jakimś odległym o 0 lub 2 krawędzie, po trzech – w jakimś odległym o 1 lub 3 krawędzie, po czterech – w odległym o 0, 2 lub 4 krawędzie itd. – jeśli do jakiegoś wierzchołka może dojść po m skokach, to może znaleźć się w nim również w sekundzie m+2 (przechodząc przez którąś krawędź w tę i we w tę), a zatem także w sekundach m+4, m+6 itd.

W sekundzie n może znaleźć się we wszystkich wierzchołkach o nieparzystej odległości od startu (bo n jest nieparzyste i większej odległości w rozpatrywanym grafie nie ma) i może też być już w każdym innym, bo zdąży dojść do niego, obchodząc podstawę w odpowiednią stronę. Jest to najmniejsze takie k, bo wierzchołki leżące w odległości 2 od startowego i nieleżące na tej samej co on podstawie wymagają n–1 kroków na tej podstawie i jednego, żeby się na nią dostać.

Dla n nieparzystych szukane k to zatem wszystkie liczby nat. nie mniejsze od n.

Zad. 4. ***Bez strat?***

Gdyby wszystkie ciągi długości mniejszej niż długość x (oznaczmy ją $|x|$) dawały po przejściu przez maszynkę ciągi długości takiej samej lub mniejszej (czyli mniejszej niż długość x), to ponieważ różne ciągi mają dawać różne, każdy ciąg długości $< |x|$ byłby efektem działania maszynki na jakimś ciągu długości poniżej $|x|$, co przeczy temu, żeby któryś był zarazem efektem działania maszynki dla ciągu x.

Zad. 5. *Krzywy układ*

Wszystkie punkty (x, y), takie że $x \in [101, 1001]$ i $y \in [101, 1000]$ mają sumę, o której mowa w zadaniu, równą $(2023 - x) + (1000 - y) + (x - 44) + (y - 101) + (x - 101) + (2023 - y) + (1001 - x) + (y - 44) =$
$= 6047 - 44 - 246 = 6003 - 3 - 243 = 5757$.

Ta suma jest najmniejsza możliwa, bo jeśli P jest punktem spoza tego obszaru, to prowadząc przez niego proste równoległe do osi, spowodujemy, że po jednej stronie którejś z tych prostych znajdą się co najmniej trzy spośród punktów A, B, C, D, a wówczas przesuwając P o 1 w tę stronę, zmniejszymy jego sumę odległości od A, B, C i D, bo przynajmniej trzy spośród AP, BP, CP, DP zmniejszą się o 1, a czwarta nie wzrośnie więcej niż o 1.

Szukanych punktów jest $(1001–100)(1000–100) = 810900$.

Zad. 6. *Biurokracja*

Użyjemy metody programowania dynamicznego. Rozważmy stany określone przez trójki

liczb (i, j, k), gdzie: i – numer okienka przy którym jest petent;

j – liczba zaświadczeń posiadanych przez petenta;

k – 0, jeśli petent jest obsługiwany (i ma wypełniony formularz RODO),

1, jeśli jego obsługa jest zakończona.

Niech $f(i, j, k)$ oznacza minimalny czas potrzebny do dojścia do stanu (i, j, k). Funkcja f spełnia następujące równania:

$f(i, j, 1) = \min(f(i, j, 0), f(i - 1, j + 1, 1))$, $f(i, j, 0) = \min(f(i, j - 1, 0) + y_i, f(i - 1, j, 1) + x_i)$,

gdzie x_i to czas wypełnienia formularza, a y_i – czas wydania jednego zaświadczenia w okienku nr i.

Wartości f są wyliczone w tabeli.

$i =$	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10
$k =$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$j = 0$	3	3	9	9	18	18	30	26	40	34	50	42	60	50	70	58	79	64	86
$j = 1$	13	13	18	18	26	26	37	34	46	42	55	50	64	58	73	64			
$j = 2$	23	23	27	27	34	34	44	42	52	50	60	58	68	64					
$j = 3$	33	33	36	36	42	42	51	50	58	58	65	64							
$j = 4$	43	43	45	45	50	50	58	58	64	64									
$j = 5$	53	53	54	54	58	58	65	65											
$j = 6$	63	63	63	63	66	66													
$j = 7$	73	73	72	72															
$j = 8$	83	83																	

Odpowiedzią jest $f(10, 0, 0) + 1 = 87$ [min].

Zad. 7. ***Palindromiczna podzielność***

Podzielność przez 3 jest równoważna faktowi, że „suma cyfr” zapisu czwórkowego dzieli się przez 3, co wynika z następujących kongruencji mod 3: $4 \equiv 1$, więc $4^n \equiv 1$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ (zatem np. liczba o zapisie czwórkowym <u>abcdefg</u>, czyli $g + f \cdot 4 + e \cdot 4^2 + d \cdot 4^3 + c \cdot 4^4 + b \cdot 4^5 + a \cdot 4^6$ przystaje do $g + f + e + d + c + b + a$).

Zapis czwórkowy takiej liczby możemy tworzyć, wybierając jako pierwszą jej cyfrę 1, 2 lub 3, jako cyfry od drugiej do dziesiątej – 0, 1, 2 lub 3, następnie odbijając je symetrycznie na pozycje od dwunastej do ostatniej i wreszcie wstawiając jako jedenastą cyfrę gwarantującą podzielność przez 3.

Jeśli suma cyfr od pierwszej do dziesiątej dzieli się przez 3, to również suma wszystkich poza jedenastą dzieli się przez 3, więc na jedenastej pozycji może być 0 albo 3, w przeciwnych wypadkach zawsze jest jedna możliwość wyboru cyfry jedenastej (niepodzielna przez 3 suma cyfr od pierwszej do dziesiątej pomnożona przez 2 daje liczbę niepodzielną przez 3, czyli dającą resztę 1 lub 2, a w obu tych wypadkach spośród cyfr systemu czwórkowego tylko jedna da sumę podzielną przez 3).

Wszystkich układów początkowych dziesięciu cyfr jest $3 \cdot 4^9$. Aby otrzymać odpowiedź do zadania, trzeba doliczyć (zliczając je w efekcie podwójnie) te układy, które są zapisami czwórkowymi podzielnych przez 3 liczb ze zbioru $[1\,000\,000\,000_4, 3\,333\,333\,333_4]$. Jest ich $(3\,333\,333\,333 - 333\,333\,333)_4 / 3$ (bo dzielna jest wielokrotnością trójki) $= 4^9$. Odpowiedzią jest zatem $4 \cdot 4^9 = 4^{10} = (2^{10})^2 = (1000+24)^2 =$
$= 1000000+48000+576 = 1048576$.

Zad. 8. ***Patycz(a)ki***

Zauważmy, że gdy na stole jest jeden patyczek, trzy lub cztery, osoba wykonująca ruch może łatwo wygrać. Są to więc sytuacje wygrywające i zapiszmy to symbolicznie jako $1, 3, 4 \in W$. Gdy na stole leżą 2 patyczki, jedyny możliwy ruch prowadzi do przegranej (bo przeciwnik znajdzie się w sytuacji wygrywającej), zapiszmy więc $2 \in P$. Możemy dodać także: $0 \in P$. Z kolei z sytuacji, gdy na stole jest 5 lub 6 patyczków, da się dojść do sytuacji przegrywającej, więc $5, 6 \in W$.

Zauważmy zatem, że dla $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zachodzi: $r \in P \Leftrightarrow r \in \{0, 2\}$.

Załóżmy teraz, że wśród liczb postaci $7n+r$, gdzie $n \in \mathbf{N}$, a $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $7n+r \in P \Leftrightarrow r \in \{0, 2\}$, i popatrzmy na sytuacje $7(n+1)+r$, gdzie $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jak łatwo sprawdzić, $7(n+1) \in P$, $7(n+1)+1 \in W$ i tylko dla $r \in \{0, 2\}$ każdy ruch z sytuacji $7(n+1)+r$ prowadzi do sytuacji wygrywającej, więc $7(n+1)+r \in P \Leftrightarrow r \in \{0, 2\}$.

Z zasady indukcji matematycznej wnosimy zatem, że wszystkie sytuacje postaci $7n$ i $7n+2$ są przegrywające, a wszystkie pozostałe – wygrywające.

$2023 = 21+2\cdot1001 = 7(3+2\cdot11\cdot13)$, więc Adaś przegra niezależnie od swojego postępowania, jeśli Basia w każdym swoim ruchu doprowadzi do sytuacji wygrywającej, a może to robić.

Rozpatrując przystawanie mod 7, mamy: $10^{101} \equiv 3^{101} = ((3^6)^{16}\cdot3^2)(3^2\cdot3)$, a ponieważ $3^6 \equiv 1$, $10^{101} \equiv (1^{16}\cdot2)\cdot(2\cdot3) \equiv 2\cdot(-1) \equiv 5$, więc przy rozpoczynaniu gry z 10^{101} patyczków strategię wygrywającą ma Adaś.

Zad. 9. ***Suma ciągu***

Strategia Koali: prosi Wombata o podanie cyfry zapisanej na pierwszej pozycji. Pokażemy, że jeśli cyfrą tą jest x, to suma wszystkich cyfr w ciągu wynosi $117 + x$. Zauważmy najpierw, że Wombat mógł wybrać dwie pierwsze cyfry na $9 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 81 - 9 = 72$ sposoby (bo nie mogą one być obie wielokrotnościami trójki). Rozpatrzymy różne możliwości rozpoczęcia ciągu przez Wombata:

• (1, 1) – wtedy pierwsze 25 elementów to: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 9, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 9, 1.

Zauważmy też, że gdyby Wombat musiał wpisać kolejną cyfrę zgodnie z opisanymi w zadaniu zasadami, to byłaby to 1 i elementy ciągu zaczęłyby się powtarzać. Innymi słowy, gdyby rozpatrywać nieskończony ciąg zaczynający się od pary (1, 1) tworzony zgodnie z zasadami, to byłby on cykliczny z okresem długości 24. Oznacza to, też że jeśli rozpatrzymy dowolny ciąg długości 24 tworzony zgodnie z zasadami i rozpoczynający się od jednej z par kolejnych elementów występujących powyżej, to występujące w nim cyfry utworzą multizbiór równy multizbiorowi tworzonemu przez pierwsze 24 cyfry wypisane powyżej. Suma cyfr w takim multizbiorze to 117. Natomiast, gdyby przedłużyć taki ciąg o jeden element, to byłby on równy pierwszemu elementowi w danym ciągu. Stąd suma byłaby równa $117 + x$, gdzie x to pierwszy element ciągu. Zauważmy też, że ze względu na przesunięcia cykliczne ten przypadek zawiera 24 różne rozpoczęcia ciągu przez Wombata (i żadne z nich nie stanowią pary liczb podzielnych przez 3).

• (2, 2) – wtedy pierwsze 25 elementów to: 2, 2, 4, 6, 1, 7, 8, 6, 5, 2, 7, 9, 7, 7, 5, 3, 8, 2, 1, 3, 4, 7, 2, 9, 2.

Kolejnym wypisanym elementem byłaby 2 i dzięki temu podobnie jak wyżej widać cykliczność ciągu z okresem 24. Zatem ponownie dowolny ciąg długości zaczynający się od dwóch kolejnych z ciągu wypisanego powyżej będzie miał sumę równą sumie pierwszych 24 elementów wypisanych powyżej, czyli 117, a gdyby dopisać jeszcze 25. element, to byłby on równy pierwszemu wyrazowi ciągu.
Tym samym rozpatrzyliśmy 24 nowe rozpoczęcia ciągu.

• (4, 4) – wtedy pierwsze 25 elementów to: 4, 4, 8, 3, 2, 5, 7, 3, 1, 4, 5, 9, 5, 5, 1, 6, 7, 4, 2, 6, 8, 5, 4, 9, 4.

Kolejnym wypisanym elementem byłaby 4 i dzięki temu podobnie jak wyżej widać cykliczność ciągu z okresem 24. Zatem ponownie dowolny ciąg długości zaczynający się od dwóch kolejnych z ciągu wypisanego powyżej będzie miał sumę równą sumie pierwszych 24 elementów wypisanych powyżej, czyli 117, a gdyby dopisać jeszcze 25. element, to byłby on równy pierwszemu elementowi ciągu.
Tym samym rozpatrzyliśmy 24 nowe rozpoczęcia ciągu.

Rozpatrzyliśmy wszystkie możliwe rozpoczęcia ciągu przez wombata. Widzimy, że zawsze suma 25 elementów to $117 + x$, gdzie x jest pierwszym elementem ciągu.

Zad. 0. *Podwójnie ząbkowane*

W rzeczywistości jest ich dokładnie $4^n - 1$, ale my wymagamy tylko oszacowania z góry.

Zaznaczmy na szaro wszystkie pola planszy należące do zbioru podwójnie ząbkowanego A. Udowodnimy najpierw, że po pocięciu zbioru A na pionowe (lub poziome) paski ciąg długości $h_1, \ldots, h_n$ pasków pionowych tworzy permutację typu „górka", to znaczy wyraz równy n ma z lewej strony ciąg rosnący (być może pusty), a z prawej malejący.

Załóżmy nie wprost i bez straty ogólności, że ciąg $h_1, \ldots, h_n$ opisuje wysokości pasków pionowych, pasek długości n jest w kolumnie k i popatrzmy na szary pasek w kolumnie $i \neq k$. Zauważmy, że z definicji zbioru A wynika, że jeśli dwa szare pola planszy leżą w tej samej linii, to wszystkie kwadraciki pomiędzy nimi (w tej samej linii) też są szare. Zatem wszystkie pola w wierszach zajętych przez pola paska z i-tej kolumny znajdujące się pomiędzy i-tą kolumną a kolumną k (czyli paskiem długości n) też są szare.

Wynika z tego, że wszystkie paski między kolumną i a kolumną k mają długość nie mniejszą niż h_i. To dowodzi monotoniczności z lewej i z prawej strony kolumny k. Tak samo dowodzimy, że po pocięciu zbioru A na paski pionowe otrzymamy ciąg długości typu „górka".

Aby utworzyć ciąg typu górka, należy wybrać spośród elementów zbioru $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$ jakiś podzbiór, być może pusty, ustawić go na jeden sposób w ciąg rosnący, po nim ustawić liczbę n, a po niej ciąg malejący złożony z pozostałych elementów. Zatem permutacji typu „górka" jest 2^{n-1}.

Ponieważ zbiorów podwójnie ząbkowanych jest nie więcej niż par ciągów n, z których jeden opisuje długości pasków poziomych, a drugi pionowych, mamy co najwyżej $2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 4^{n-1}$ zbiorów podwójnie ząbkowanych.