

ROZWIĄZANIA – ŚCIŚLE TAJNE!!!

R1

Ze zdań 3 i 4 wynika, że na pewno lubi Abigail (*tertium non datur*). Czyli ze zdania 1 lubi też Batszebę, czyli ze zdania 2 lubi też Mikal. A skoro tak, to poprzednik zdania 3 musiał być fałszywy, czyli lubił też Jonatana i nie ma żadnej sprzeczności.

Zatem ostatecznie mamy tylko jedną możliwość – Dawid lubił Abigail, Batszebę, Mikal i Jonatana.

R2

Koala może zdejmować kolejne tomy z półki i jeśli jest to tom nr 10, odłożyć go na półkę pomocniczą, a każdy inny odstawiać z powrotem na półkę właściwą. Na koniec dostawi tam tom 10, będzie więc na niej układ $x \ x \ x \ x \ x \ x \ x \ x \ 10$ (gdzie ikсы oznaczają tomy o nieznanach numerach).

Teraz postępuje podobnie, tylko ściąga pierwszych 9 tomów od lewej i na półkę pomocniczą odkłada tom nr 9, dostawia go po przełożonych na koniec ośmiu, a za niego przekłada tom 10.

Dalej analogicznie – dla $n = 8, 7, 6, \dots, 2$ kolejno:

- ściąga n tomów, przy czym tom o nrze n odkłada na półkę pomocniczą, a każdy inny odstawia na koniec na półce właściwej,
- przekłada tom n z półki pomocniczej na właściwą,
- przekłada $10-n$ tomów z lewej strony półki właściwej na jej koniec.

R3

Lemat: $1+2+4+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$ (można to zobaczyć dzięki zapisaniu lewej strony dwójkowo i dodaniu do niej dwójkowo 1, można też pomnożyć ją przez $(2-1)$, wykonując mnożenie „każdy z każdym”)

Z konstrukcji trójkąta wynika (patrz rys.), że na kolejnych „piętrach” stoi o jeden mniej niż poniżej liczb dwa razy większych niż poniżej, wygodnie można je więc posumować wzdłuż linii równoległych do nie poziomego boku trójkąta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 32 & & & & \\
 & 16 & & 16 & & & \\
 & 8 & 8 & & 8 & & \\
 & 4 & 4 & 4 & & 4 & \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & & 2 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array}$$
$$1+(1+2)+(1+2+4)+(1+2+4+8)+\dots+(1+2+4+\dots+2^{99}), \text{ co z lematu daje}$$

$$(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\dots+(2^{100}-1)=2^1+2^2+2^3+\dots+2^{100}-100.$$

Stosując ponownie wzór z lematu, mamy dalej: $2^{101}-1-1-100 = 2^{101}-102$.

R4

Przed słowem KOALA w słowniku znajdują się wszystkie słowa zaczynające się od: A, E, J, KA, KE, KJ, KL, KM, KOAA, KOAE, KOAJ. Dla każdego przypadku obliczymy, ile jest takich słów:

A: $\binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 3 = 648$

E: $\binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 3 = 648$

J: $4 \cdot 3 \cdot 3^3 = 324$

KA: $3 \cdot 3 \cdot 3^2 = 81$

KE: $3 \cdot 3 \cdot 3^2 = 81$

KJ: $3^3 = 27$

KL: $3^3 = 27$

KM: $3^3 = 27$

KOAA: 3

KOAE: 3

KOAJ: 3

Zatem wszystkich słów poprzedzających słowo KOALA jest $648 \cdot 2 + 324 + 81 \cdot 2 + 27 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 1872$. Czyli słowo KOALA występuje na 1873. miejscu.

R5

Możliwości przydzielenia każdemu aspirantowi dowolnej z trzech ulic jest 3^5 , trzeba jednak odrzucić przypadki, gdy któraś z ulic nie została nikomu przydzielona. Jest ich $3 \cdot 2^5 - 3$ (przydzielamy każdemu dowolną z dwóch, odrzuciwszy trzecią na trzy sposoby, ale wówczas każdy z trzech układów, w których wszyscy trafią na jedną ulicę, będzie zliczony dwukrotnie, stąd odejmowanie). Ostatecznie wynik to $3^5 - (3 \cdot 2^5 - 3) = 150$.

Można też zliczać przypadki podziału aspirantów:

1+2+2: $3 \cdot 5 \cdot \binom{4}{2} = 90$ (wybór kolejno:

ulicy i jednoosobowego patrolu na nią oraz dwóch osób na jedną z pozostałych ulicę)

1+1+3: $3 \cdot \binom{5}{3} \cdot 2 = 60$ (wybór kolejno:

ulicy i trzyosobowego patrolu na nią oraz ulicy dla jednego z pozostałych aspirantów)

R6

6,5; 5,5; 4,5; 4,5; 3,5; 2,5; 2,5; 1,5; 0,5. To jedyny zestaw, ale nie trzeba tego dowodzić.

R7

W grafie, w którym wierzchołkami są osoby, a połączone będą te, które się znają, można pokolorować dowolny wierzchołek v na zielono, jego sąsiadów (czyli osoby, które zna) na czerwono, osoby odległe o 2 krawędzie (czyli znajomych znajomych v) – na zielono, odległe o 3 – na czerwono itd. Jeśli do jakiegoś wierzchołka u da się w ten sposób dotrzeć z v , to wiadomo, jaki będzie miał kolor – w przeciwnym wypadku znaczyłoby to, że istnieje droga z v do u długości parzystej i inna długości nieparzystej, a razem tworzyłyby one taneczne koło złożone z nieparzystej wielu osób, co przeczy założeniom zadania.

Jeśli do jakiegoś wierzchołka w nie da się dojść z v , to procedurę kolorowania powtarzamy, startując z w , itd. Szukane grupy stworzą wierzchołki czerwone i wierzchołki zielone – wynika to ze sposobu ich kolorowania.

R8

Jeśli z muru 10-klockowego usunąć najwyższy klocek, otrzyma się mur 9-klockowy, przy czym zachodzą dwa przypadki:

- w tym 9-klockowym murze jest 5 spadków – oznacza to, że najwyższy klocek musiał stać przed jednym z nich lub na końcu (bo inaczej powodowałby spadek bezpośrednio po nim);
- w tym 9-klockowym murze są 4 spadki – oznacza to, że najwyższy klocek nie mógł stać przed żadnym z nich ani na końcu (bo wówczas usunięcie go nie zmniejszyłoby liczby spadków).

10-klockowych murków z 5 spadkami jest zatem $6 \cdot m_5 + 5 \cdot m_4$, gdzie m_s oznacza liczbę 9-klockowych murków o s spadkach, czyli odpowiedź to 1310354.

R9

Pokażemy najpierw przykładowy algorytm przycinania, który daje $k = 25$. Załóżmy, że przez pierwszych 6 tygodni Panda będzie przycinać kolejno bambus pierwszy, bambus drugi, bambus pierwszy, bambus drugi, bambus pierwszy i bambus trzeci. Następnie Panda będzie powtarzać tę sekwencję w cyklach 6-tygodniowych. W poniższej tabelce przedstawiamy wysokości poszczególnych bambusów pod koniec kolejnych tygodni w przypadku stosowania tego algorytmu (w momencie tuż przed przycinaniem):

nr tygodnia	bambus 1	bambus 2	bambus 3	przycinany bambus
0	1	1	1	-
1	9	7	4	1
2	9	13	7	2
3	17	7	10	1
4	9	13	13	2
5	17	7	16	1
6	9	13	19	3
7	17	19	4	1
8	9	25	7	2
9	17	7	10	1

Zauważmy, że sytuacja pod koniec dziewiątego tygodnia jest identyczna jak pod koniec trzeciego tygodnia. Zatem wartości w tabelce będą się powtarzać okresowo i największą wysokością osiąganą przez którykolwiek z bambusów będzie 25 m.

Przypuśćmy teraz nie wprost, że istnieje algorytm A przycinania bambusów, który pozwala uzyskać wartość $k < 25$. Zauważmy, że jeśli w dwóch kolejnych tygodniach Panda nie zdecyduje się przyciąć bambusa pierwszego, to osiągnie on wysokość $x + 3 \cdot 8 \geq 25$ m. Zauważmy też, że jeśli w trzech kolejnych tygodniach Panda nie zdecyduje się przyciąć bambusa drugiego, to osiągnie on wysokość $x + 4 \cdot 6 \geq 25$ m. Zatem w algorytmie A:

- 1) w każdych dwóch kolejnych tygodniach Panda musi co najmniej raz przyciąć bambus pierwszy,
 - 2) w każdych trzech kolejnych tygodniach Panda musi co najmniej raz przyciąć bambus drugi.
- Wiemy też, że czasem musimy przycinać bambus trzeci. Niech y oznacza dowolny tydzień różny od pierwszych trzech, gdy Panda zdecyduje się przyciąć bambus trzeci. Wówczas z warunku 1 wynika, że w tygodniach $y - 1$ oraz $y + 1$ Koala musi przyciąć bambus pierwszy. Ale wówczas plan na tygodnie $y - 1$, y i $y + 1$ przeczy warunkowi 2.

R10

Weźmy matematyka M_1 , który obudził się jako pierwszy, a spał do chwili c_1 . Wtedy wśród pozostałych albo jest przynajmniej 13, którzy zasnęli po czasie c_1 , albo znajdziemy czterech, którzy zasnęli nie później niż w c_1 . W drugim przypadku mamy 5 matematyków, którzy nie tylko są każdy z każdym współspaczami, ale nawet śpią jednocześnie w chwili c_1 . Dalej zakładamy więc, że przynajmniej 13 zasnęło po chwili c_1 . Powtarzamy rozumowanie, czyli znajdujemy wśród nich M_2 , który obudził się najwcześniej, a spał do chwili c_2 . I tak dalej, przy czym albo rozumowanie da się przeprowadzić cztery razy i mamy piątkę matematyków z parami rozłącznymi czasami spania, albo wcześniej znajdziemy piątkę, w której każda para jest współspaczami.