ELIMINACJE SZKOLNE
LOGIKA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ - NOTATKI Z WYKŁADU

PLAN WYKŁADU
1) Intuicja indukcji
2) Twierdzenie o indukcji
3) Dowód indukcyjny – grzechy główne
4) Dowód indukcyjny – jak to zrobić (zadania)

Ad. 1. Intuicja domina. Film: https://www.youtube.com/watch?v=V-QkFrylJbQ
Trzeba odpowiednio mocno pchnąć pierwszego i zachować właściwe odstępy, to wszyscy się przewrócą.

Ad 2. Twierdzenie o indukcji matematycznej (TIM). Dowodliwe na gruncie arytmetyki, ale leży blisko aksjomatów liczb naturalnych (w pewnej wersji samo może być aksjomatem), dlatego go nie dowodzimy. Ale musimy je właściwie rozumieć.
Założenia: 1) Twierdzenie *T* zachodzi dla 1 (notacja: $T(1)$ jest prawdziwe),
2) Dla każdej liczby $n\geq 1$ zachodzi **implikacja** $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $\mathrm{T}(n)$ oznacza twierdzenie zapisane dla liczby *n*, a nie prawdziwość $\mathrm{T}(n)$.
Teza: Twierdzenie *T* zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych – notacja T(N).
Możliwe warianty (przykładowe):
- Zachodzi $T(125)$ i implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Wtedy teza zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n\geq 125$.
- Zachodzi $T(2)$ i implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Wtedy teza zachodzi dla liczb parzystych dodatnich.
- Zachodzi $T(2)$ i implikacja $T(n) \Rightarrow T(2n)$. Wtedy teza zachodzi dla potęg dwójki ≥ 2.

Ad 3. Grzech 1. Czy w TIM zakładamy tezę twierdzenia *T*? Uczniowie często mówią: Załóżmy, że $T(n)$ jest prawdziwe, pokażemy, że prawdziwe jest $T(n+1)$. Wtedy nie potrzeba żadnego dowodu, wszak założyliśmy tezę dowodzonego twierdzenia *T* (wobec dużego kwantyfikatora nad *n*). **NIE zakładamy tezy**, bowiem faktycznie sprawdzamy prawdziwość implikacji dla wszystkich *n*, zarówno dla tych, dla których $T(n)$ jest prawdziwe, jak i fałszywe. **Kiedy implikacja jest prawdziwa?** Kiedy poprzednik jest fałszywy, a następnik dowolny **oraz** kiedy poprzednik jest prawdziwy i następnik też. Oba te przypadki są sprawdzane i dopiero z tego wynika prawdziwość implikacji w 2). Tyle że w I przypadku implikacja jest prawdziwa, więc tym przypadkiem nie trzeba się specjalnie zajmować. Zajmujemy się więc przypadkiem II. Dowód implikacji $p \Rightarrow q$ nie orzeka nic o prawdziwości zdań *p* i *q* (zdanie *Jeśli Wąchock jest stolicą Polski, to jestem słoniem.* jest prawdziwe.)

Zad. 1. Wyznaczyć zbiór liczb rzeczywistych, kiedy implikacja $x>0 \Rightarrow x>1$ jest prawdziwa. Odp. $(-\infty, 0]\cup(1, \infty)$.

Grzech 2. Uczniowie często sprawdzają, że zachodzi $T(1)$ oraz że zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+1)$ w przypadku, gdy $\mathrm{T}(n)$ jest prawdziwe. Na tym kończą dowód. A to niczego nie dowodzi. To jest tylko sprawdzenie założeń pewnego twierdzenia. Trzeba jeszcze to twierdzenie zastosować i z niego dopiero wynika, że T jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych. Analogia do twierdzenia Pitagorasa. Mamy wykazać, że zachodzi związek między długościami boków trójkąta, sprawdzamy, że to jest trójkąt prostokątny i kończymy dowód nic nie wykazawszy o bokach.

Ad. 4. Rozwiążmy przykładowe zadania pokazujące niuanse logiczne dowodów indukcyjnych.

Zad. 2. Udowodnij, że wszystkie wyrazy ciągu $a_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}$ (w zapisie $\sqrt{2}$ występuje *n* razy, a potęgowanie wykonujemy od najwyższego wykładnika) są mniejsze od 2. Oczywiście $n\in\{1, 2, 3, \ldots\}$

Rozwiązanie: 1) Sprawdzamy, czy $T(1)$ jest prawdziwe. Tak, bo $a_1 = \sqrt{2}$ jest mniejsze od 2.
2) Kiedy $T(n)$ dla jakiegoś *n* jest nieprawdziwe, implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+1)$ zachodzi, a kiedy $T(n)$ dla jakiegoś *n* jest prawdziwe, czyli $a_n<2$, mamy $a_{n+1} = \sqrt{2}^{an} < \sqrt{2}^2 < 2$, czyli $T(n+1)$ też jest wówczas prawdziwe, zatem implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+1)$ zachodzi.
3) Sprawdziliśmy, że spełnione są założenia TIM. Stosujemy zatem to twierdzenie i na jego mocy mamy, że $a_n<2$ dla wszystkich *n* naturalnych, cbdo.

Zad. 3. Twierdzenie o tym, że wszystkie koty są czarne. Można ew. pominąć.

Zad. 4. (można ew. pominąć) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej *n* zachodzi równość

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rozwiązanie:

1° Dla $n=1$ równość przyjmuje postać $1=1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwa jest równość
Udowodnimy, że wówczas

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Wychodząc od lewej strony równości i korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{n+1}{6}\cdot(n(2n+1)+6(n+1))=\frac{n+1}{6}\cdot\left(2n^2+7n+6\right)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

co dowodzi prawdziwości implikacji indukcyjnej. Na mocy TIM nierówność zachodzi dla każdej liczby naturalnej.

Zad. 5. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej *n* zachodzi nierówność $30n < 2^n + 110$.
Rozwiązanie:

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30<2+110=112$.

2° Załóżmy, że $30n<2^n+110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1)<2^{n+1}+110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1)=30n+30<2^n+110+30=2^{n+1}+110+30-2^n<2^{n+1}+110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n\geqslant 5$.

Zatem nierówność (została udowodniona dla $n\geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, ze

dla $n=2$ mamy $60<4+110=114$,

dla $n=3$ mamy $90<8+110=118$,

dla $n=4$ mamy $120<16+110=126$.

czyli dowodzona nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych. Wydaje się, że sprawdziliśmy wszystko, ale dlaczego dla n=6 mamy 180<174? Gdzie jest sprawdzenie T(5)? Co tak naprawdę udowodniliśmy?

Zad. 6. Czy prawdziwa jest nierówność $n^4 \leq 2^n$?
1) Dla n=1 jest prawdziwa.
2) Załóżmy, że jakieś n spełnia tę nierówność, chcemy pokazać, że zachodzi $(n+1)^4 \leq 2^{n+1}$.
Mamy:

$$(n+1)^4=n^4\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\leqslant 2^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^4=2^n\cdot\left(1+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^n\cdot\left(1+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)=2^n\cdot\left(1+\frac{4}{n}+\frac{11}{n^2}\right)<2^n\cdot\left(1+\frac{4}{n}+\frac{12}{n^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^n\cdot\left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n}\right)=2^n\cdot\left(1+\frac{6}{n}\right)\leqslant 2^n\cdot 2=2^{n+1}.$$

Szacowanie w II linijce celowo jest tendencyjne (przez $1/n^2$ a nie $1/n$), żeby nie spalić dowcipu.
Ostatnia linia jest poprawna dla $n\geq 6$. Czy na mocy TIM twierdzenie jest prawdziwe dla liczb naturalnych $n\geq 6$? Nie, bo nie jest prawdziwe dla 2, 3, 4, …, 15. Dla n=16 zachodzi równość i to jest nasz warunek 1), czyli na mocy TIM twierdzenie jest prawdziwe dla liczb naturalnych $n\geq 16$?

UWAGI ORGANIZCYJNE

1. Czas trwania wykładu 45 min. Czas pisania zadań 45 min. Nie trzeba rozwiązać wszystkich zadań.
2. Nie używamy kalkulatorów.
3. Termin konkursu szkolnego: 30 XI (można zrobić jednego dnia wykład, drugiego zadania).
4. Odsyłanie wyników mejlem na adres: mikolaj@math.uniwroc.pl do 4 XII.
5. Wyniki przesłać w pliku xls zgodnym ze wzorem zamieszczonym na stronie www konkursu.
6. W przypadku dużej liczby uczniów i dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich nazwisk, ale należy w treści mejla podać liczbę uczestników wykładu i części zadaniowej w każdej kategorii.
7. Prac nie trzeba przesyłać pocztą, ale należy je zachować do czasu ogłoszenia listy finalistów. W przypadku dużych odchyleń wyników z danej szkoły od średniej, możemy poprosić o przesłanie prac.
8. W zad. 1-8 każdy podpunkt jest oceniany zero-jedynkowo. Nie ma połówek za częściowo poprawne odpowiedzi.
9. Finały w Instytucie Matematycznym UWr, pl. Grunwaldzki 2, 50-384 Wrocław **16 XII**, początek godz. 10:15, sala HS.

KLUCZ ODPOWIEDZI

1. a) R\{0} lub $(-\infty, \infty)\setminus\{0\}$ lub $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$, b) $[1, \infty)$, c) R lub $(-\infty, \infty)$, d) $(-2, 2)\cup[2, \infty)$ lub $(-2, \infty)$
2. a) T, b) N, c) N, d) T
3. a) T, b) T, c) N, d) N
4. a) T, b) T, c) T, d) T
5. a) T, b) T, c) T, d) T
6. a) T, b) T, c) T, d) T
7. a) T, b) N, c) N, d) N
8. a) N, b) T, c) N, d) T
9. $2^{65}\cdot n \le 2^{65}\cdot 64 = 2^{65}\cdot 2^6 = 2^{71} \le 2^n+2^{71}$ 4 pkt (po 1 punkcie za każde przejście)
10. 0° Dla $n \le 64$ mamy zad. 9. Dla $n \ge 65$ dowodzimy indukcyjnie.

1° Dla $n = 65$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 2^{65}\cdot 65\,,$$

$$P = 2^{65} + 2^{71} = 2^{65} + 2^6\cdot 2^{65} = 2^{65} + 64\cdot 2^{65} = 65\cdot 2^{65}\,,$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geqslant 65$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{65}\cdot n \leqslant 2^n + 2^{71}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{65}\cdot(n+1) \leqslant 2^{n+1} + 2^{71}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geqslant 65$ otrzymujemy

$$L = 2^{65}\cdot(n+1) = 2^{65}\cdot n + 2^{65} \leqslant 2^n + 2^{71} + 2^{65} \leqslant 2^n + 2^{71} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{71} = P\,,$$

3° założenia TIM są spełnione, więc na mocy TIM nierówność jest spełniona dla $n \ge 65$.

Po 1 punkcie za: 0°, 1°, 2°, 3°.

11. Dowód dzielimy na dwa przypadki. 0° Dla $n \le 27$ zachodzi $3^{28}\cdot n \le 3^{28}\cdot 27 = 3^{28}\cdot 3^3 = 3^{31} \le 3^n+3^{31}$, dla $n \ge 28$ indukcyjnie.

1° dla $n=28$ mamy $L = 3^{28}\cdot 28 = P$

2° niech $n \ge 28$ będzie taką liczbą, że $3^{28}\cdot n \le 3^n+3^{31}$, pokażemy, że z tego wynika, że $3^{28}\cdot(n+1) \le 3^{n+1}+3^{31}$.

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geqslant 28$ otrzymujemy

$$L = 3^{28}\cdot(n+1) = 3^{28}\cdot n + 3^{28} \leqslant 3^n + 3^{31} + 3^{28} \leqslant 3^n + 3^{31} + 3^n = 2\cdot 3^n + 3^{31} <$$

$$< 3\cdot 3^n + 3^{31} = 3^{n+1} + 3^{31} = P,$$

3° na mocy TIM i 0° nierówność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych. Po 1 punkcie za: 0°, 1°, 2°, 3°.

imię i nazwisko:…………………………………………………………………………… szkoła: ………………………………………….

Uwaga! Liczby naturalne nie zawierają zera ($0 \notin N$).

Zad. 1. Wyznacz zbiór liczb rzeczywistych, dla których podana implikacja jest prawdziwa.

a) $x<1 \Rightarrow x^2>0$ ……………………………………

b) $x<1 \Rightarrow x^2<0$ ……………………………………

c) $x^5>32 \Rightarrow x^6>64$ ……………………………………

d) $x^5<32 \Rightarrow x^6<64$ ……………………………………

W zad. 2-8 przy każdej odpowiedzi wpisz TAK lub NIE.

Zad. 2. Niech $a_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}$ (w tym zapisie $\sqrt{2}$ występuje n razy).

a) $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ……………………………………

b) $a_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{2}$ ……………………………………

c) $a_{n+1} = a_n^{\sqrt{2}}$ ……………………………………

d) $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ ……………………………………

Zad. 3. Dla ciągu a_n z poprzedniego zadania i twierdzenia T mówiącego, że każdy wyraz tego ciągu jest mniejszy od 2:

a) $T(1)$ jest prawdą. ……………………………………

b) $T(2)$ jest prawdą. ……………………………………

c) T(13) jest fałszem. ……………………………………

d) T(1000005) jest fałszem. ……………………………………

Zad. 4. Dla ciągu a_n i twierdzenia T z poprzedniego zadania prawdą jest:

a) Jeśli $T(n)$ jest prawdą, to $T(n+1)$ też. ……………………

b) Jeśli $T(n)$ jest fałszem, to $T(n+1)$ też. ……………………

c) Jeśli $T(n+1)$ jest prawdą, to $T(n)$ też. ……………………

d) Jeśli $T(n+1)$ jest fałszem, to $T(n)$ też. ……………………

Zad. 5. Dla ciągu a_n i twierdzenia T z poprzedniego zadania prawdą jest:

a) Jeśli $T(n)$ jest prawdą, to implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ też. ……………………

b) Jeśli $T(n)$ jest fałszem, to implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ też. ……………………

c) Jeśli $T(n)$ jest prawdą, to implikacja $T(n+1) \Rightarrow T(n)$ też. ……………………

d) Jeśli $T(n)$ jest fałszem, to implikacja $T(n+1) \Rightarrow T(n)$ też. ……………………

Zad. 6. Niech twierdzenie T mówi, że wszystkie wyrazy ciągu a_n są mniejsze niż 3, gdzie $a_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots\sqrt{2}^{3}}}}$ (w tym zapisie $\sqrt{2}$ występuje n razy).

a) $T(1)$ jest prawdą. ……………………………………

b) Jeśli $T(n)$ jest prawdą, to implikacja indukcyjna też. ……………………………………

c) Jeśli $T(n)$ jest fałszem, to implikacja indukcyjna też. ……………………………………

d) T jest prawdą. ……………………………………

Zad. 7. Jeśli dla pewnego twierdzenia T zdania $T(1)$ i $T(7)$ są prawdą, a implikacja indukcyjna zachodzi dla $n>3$, to wiadomo, że:

a) $T(8)$ jest prawdą. ……………………………………

b) $T(5)$ jest prawdą. ……………………………………

c) $T(4)$ jest prawdą. ……………………………………

d) Dla n naturalnych zdanie $T(n)$ jest prawdziwe tylko dla $n=1$ oraz $n \in \{7, 8, 9, 10, \ldots\}$. ……………………

Zad. 8. Jeśli dla pewnego twierdzenia T implikacja indukcyjna zachodzi dla $n>7$, to prawdziwa musi być implikacja:

a) $T(7) \Rightarrow T(8)$ ……………………………………

b) $T(8) \Rightarrow T(9)$ ……………………………………

c) $T(7) \Rightarrow T(77)$ ……………………………………

d) $T(8) \Rightarrow T(88)$ ……………………………………

Zad. 9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \leq 64$ zachodzi nierówność $2^{65} \cdot n \leq 2^n + 2^{71}$.

Zad. 10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej zachodzi nierówność $2^{65} \cdot n \leq 2^n + 2^{71}$.

Zad. 11. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej zachodzi nierówność $3^{28} \cdot n \leq 3^n + 3^{31}$.