

ELIMINACJE SZKOLNE
ODLEGŁOŚĆ NA OSI LICZBOWEJ – NOTATKI Z WYKŁADU

PLAN WYKŁADU

- 1) Położenie liczb całkowitych na osi liczbowej, dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych (tylko Młodzicy)
- 2) Operacja zmiany znaku
- 3) Operacja „odległość liczby od zera”
- 4) Odległość liczb na osi
- 5) Niewiadoma, zapisywanie **pytań** o odległość na osi

Ad. 1. Model osi liczbowej – termometr (nie oś czasu, bo tam nie ma ani zera, ani punktów reprezentujących liczby – są tylko ponumerowane przedziały!). Położenie liczb całkowitych względem zera, symetria. Zapisywanie nierówności między liczbami całkowitymi. Dodawanie i odejmowanie liczb dodatnich jako przesuwanie się na osi w prawo lub w lewo o zadaną liczbę jednostek. Stosowana tu konwencja: liczby ujemne są zapisywane z minusem w indeksie górnym zamiast stosowania „krótkiego minusa” (wtedy nie ma potrzeby używania nawiasów).

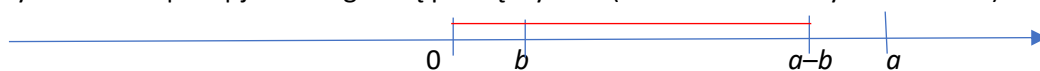
Ćwiczenie. Gdzie na osi leżą liczby: $3-5$, $^{-}3+7$, $^{-}2-5$, $^{-}3-7$ itd.

Ad 2. W matematyce mamy dwa symbole minusa (jak na kalkulatorze): „długi” minus oznacza odejmowanie liczb (i musimy mieć dwie liczby, żeby od jednej odjąć drugą), „krótki” minus oznacza operację zmiany znaku (brania liczby przeciwnej, brania liczby położonej symetrycznie względem zera) i potrzebujemy do tego jednej liczby, np. zmiana z 3 na $^{-}3$, z $^{-}7$ na 7, z $^{-}(-(-5)) = ^{-}5$, $^{-}(5-3) = ^{-}2$, $^{-}(1-4) = 3$ itd. W efekcie używamy trzech rodzajów minusów (długi oznaczający odejmowanie, krótki oznaczający liczbę przeciwną i górny oznaczający liczbę ujemną). Nie można pisać ^{-}x , bo to nie jest liczba ujemna tylko przeciwna do x , ale można np. $^{-}^{-}2 = 2$, $^{-}(-2-2) = 4$, $^{-}(-2)-2 = 0$.

Ad 3. Ile liczb na osi liczbowej leży w odległości 1 od zera? A w odległości 3 od zera? A w odległości $^{-}5$? A w odległości 0 od zera? Odległość jest zawsze nieujemna, bo to jest rozstaw nóżek cyrkla lub długość sznurka służącego za cyrkiel do odmierzenia odległości na osi. Operację obliczania odległości liczby n od zera oznaczamy pionowymi kreskami tak $|n|$ (nie używamy na wykładzie nazwy *moduł* ani *wartość bezwzględna*, gdy uczeń sam zapyta, można przyznać, że to jest to samo). **Ćwiczenie.** $|5|=5$, $|^{-}7|=7$, $|^{-}(-(-2))|=2$, $|^{-}(-(-2))|=2$, $^{-}|^{-}2|=^{-}2$ itd.

Ad 4. Odejmowanie dwóch liczb całkowitych w jednej a potem w odwróconej kolejności daje te same wyniki z różnym znakiem, np. $5-2=3$ i $2-5=^{-}3$, $1-4=^{-}3$ i $4-1=3$. Ogólnie $a-b$ oraz $b-a$ różnią się tylko znakiem (tzn. $(a-b) = -(b-a)$). To znaczy, że $|a-b| = |b-a|$. Ta wielkość oznacza **odległość liczb a i b** na osi. Bowiem

a) gdy liczby a i b są obie dodatnie i a jest większe od b , to $a-b = |a-b| = |a|-|b|$ pokazuje, o ile dalej od zera leży a niż b , czyli wówczas $|a-b|$ jest odległością pomiędzy a i b (równość czerwonych odcinków)



b) gdy obie liczby są ujemne, sytuacja jest symetryczna.

c) gdy liczby są różnych znaków, to $|a-b| = |a|+|b|$, co też jest odległością a od b na osi.

Ćwiczenie. $|5-3|=|3-5|=2$, $|2-7|=|7-2|=5$, $|^{-}2-5|=|5-^{-}2|=7$ itp. W ostatnim przykładzie pojawia się odejmowanie liczby ujemnej (którego Młodzicy mogą nie znać, ale wykonują wówczas takie działanie pod znakiem $|.$), czyli przez zamianę kolejności odejmowania).

Ad 5. Jaka liczba leży w odległości 2 od 5? Czy jest tylko jedna taka liczba? Wszystkie odpowiedzi zaznaczamy na $^{-}$ i odczytujemy z osi liczbowej. Pierwsze pytanie można zapisać jako $|?^{-}5|=2$ i odpowiadamy $?=3$ lub $?=7$. Zamiast znaku zapytania matematycy używają symbolu niewiadomej do odgadnięcia, czyli x . Napis $|x-5|=2$ czytamy więc tak: *Jaka liczba leży na osi w odległości 2 od piątki?* Odpowiadamy $x=2$ lub $x=7$. Nie używamy terminów: równanie, rozwiązanie równania, tym bardziej równanie z wartością bezwzględną itp. W zadaniach Juniorów występują także nierówności, więc można przerobić poniższe przykłady na nierównościowe).

Zad. 1. Zapisz pytania i odpowiedzi na nie. *Jaka liczba leży w odległości:* a) 2 od jedynki, b) 3 od $^{-}4$, c) 0 od 5?

Zad. 1JUN. Zapisz pytania i zaznacz na osi liczby, które są odpowiedzią (Juniorzy). *Jaka liczba leży w odległości:*

- a) mniejszej od 2 od liczby 3? b) większej od 4 od liczby $^{-}5$? c) równej 1 od liczby $^{-}5$, d) większej od $^{-}1$ od 2?
- d) mniejszej od 0 od liczby 5?

Zad. 2. Zapisz pytanie i odpowiedzi: *Jakie liczby mają sumę odległości od 2 i 5 równą a) 4, b) 3, c) 2, d) 1?*

Zad. 3. Zapisz słowami, co oznaczają te zapisy symbolami matematycznymi:

a) $|x|=2$, b) $|x-2|=3$, c) $|x-3|+|x-4|=1$.

Zad. 4. Jakie liczby spełniają podane warunki? a) $||x|-5|=3$, b) $||x-2|-1|=0$, c) $|x-6|+|x-7|=1$

Uwaga! Nie można zostawiać odpowiedzi pustych. W każdej trzeba coś napisać. W przeciwnym razie będą oceniane na 0 pkt.

UWAGI ORGANIZACYJNE

1. Czas trwania wykładu 45 min. Czas pisania zadań 45 min. Nie trzeba rozwiązać wszystkich zadań.
2. Nie używamy kalkulatorów.
3. Termin konkursu szkolnego: 23 XI (można zrobić jednego dnia wykład, drugiego zadania).
4. Odsyłanie wyników mejlem na adres: mikolaj@math.uni.wroc.pl do 27 XI.
5. Wyniki przesać w pliku xls zgodnym ze wzorem zamieszczonym na stronie www konkursu.
6. W przypadku dużej liczby uczniów i dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich nazwisk, ale należy w treści mejla podać liczbę uczestników wykładu i części zadaniowej w każdej kategorii.
7. Prac nie trzeba przysyłać pocztą, ale należy je zachować do czasu ogłoszenia listy finalistów. W przypadku dużych odchyżeń wyników z danej szkoły od średniej, możemy poprosić o przesłanie prac.
8. Każdy podpunkt jest oceniany zero-jedynkowo. Nie ma połówek za częściowo poprawne odpowiedzi.
9. Finały w Instytucie Matematycznym UW, pl. Grunwaldzki 2, 50-384 Wrocław **9 XII**, początek godz. 10:15, sale HS (Juniorzy) i WS (Młodzicy).

Wszystkie podpunkty oceniamy zero-jedynkowo.

KLUCZ ODPOWIEDZI – JUNIORZY

1. a) -1 , b) 5 , c) 3 , d) -7
2. a) -1 , b) -5 , c) -3 , d) -7
3. a) 1 , b) 5 , c) 3 , d) -7
4. a) $|x-5|=2$, b) $|x|=1$ lub $|x-0|=1$, c) $|x-5|=0$, d) $|x-4|=-5$
5. a) 3 i 7 , b) 1 i -1 , c) -5 , d) nie ma takich liczb
6. a) $|x-2|>1$, b) $|x-5|<3$, c) $|x-7|>0$, d) $|x|<-1$ lub $|x-0|<-1$
7. odpowiednie rysunki
8. a) $|x-2|+|x-3|=1$, b) $|x-2|+|x-3|=2$, c) $|x-2|+|x-3|>1$, d) $|x-2|+|x-3|>-1$
9. odpowiednie rysunki
10. a) 7 i -7 , b) 2 , c) 7 i -7 , d) nie ma takich liczb, e) nie ma takich liczb, f) 1 i -1 , g) -3 i -1 , h) 3 i -3 , i) nie ma takich liczb, j) 10 i -4 , k) nie ma takich liczb, l) 6 i 4 , m) -1 i -2 , n) -6 , o) 15 , -15 , 5 i -5 , p) 7 i -7 , r) 0 , 12 i -12 , s) 9 i -9 , t) 8 , -4 , 4 i 0 , u) 2 , -2 , w) 1 , -1 , x) $0,2$, 4 , -2
11. zakreślone: a) -2 , 0 , 3 , 8 , b) -18 , -7 , -3 , -2 , c) 2 , d) 0 , 8 , 20 , 61 , 70 , 84 , e) wszystkie
12. a) T, b) T, c) N, d) T, e) N, f) N, g) N, h) T, i) T, j) N, k) N, l) T, m) T

KLUCZ ODPOWIEDZI – MŁODZICY

1. a) -1 , b) 5 , c) 3 , d) -7
2. a) -1 , b) -5 , c) -3 , d) -7
3. a) 1 , b) 5 , c) 3 , d) -7
4. a) $|x-5|=2$, b) $|x|=1$ lub $|x-0|=1$, c) $|x-5|=0$, d) $|x-4|=-5$
5. a) 3 i 7 , b) 1 i -1 , c) -5 , d) nie ma takich liczb
6. odpowiednie przykłady
7. odpowiednie przykłady
8. a) Jaka liczba leży w odległości 7 od zera? b) Jaka liczba leży w odległości 2 od trójki? c) Jaka liczba leży w odległości mniejszej od trzech od dwójki? d) Jaka liczba ma sumę odległości od trójki i minus trójki równą 4.
9. a) 7 i -7 , b) 2 , c) 7 i -7 , d) nie ma takich liczb, e) 1 i -1 , f) -3 i -1 , g) 3 i -3 , h) nie ma takich liczb, i) 10 i -4 , j) nie ma takich liczb, k) 6 i 4 , l) -1 i -2 , m) -6 , n) 15 , -15 , 5 i -5 , o) 7 i -7 , p) 0 , 12 i -12 , r) 9 i -9 , s) 8 , -4 , 4 i 0 , t) 2 , -2 , u) 1 , -1
10. a) T, b) T, c) N, d) T, e) N, f) N, g) N, h) T, i) T, j) N, k) N, l) T, m) T

imię i nazwisko:..... szkoła:

Zad. 1. Ile wynosi podana liczba?

- a) $-(-(-1))$
- b) $-(-(-(-(-5))))$
- c) $-(-(-(-(-3)))...)$
w tym napisie jest 100 minusów
- d) $-(-(-(-(-7)))...)$
w tym napisie są 2023 minusy

Zad. 2. Ile wynosi podana liczba?

- a) $-|-|-1||$
- b) $-|-|-|-|-|-|-5||||$
- c) $-|-|-|-|-3||...|$
w tym napisie jest 100 minusów
- d) $-|-|-|-|-7||...|$
w tym napisie są 2023 minusy

Zad. 3. Ile wynosi podana liczba?

- a) $-(-(-1))$
- b) $|(-(-(-(-5))))|$
- c) $-(-(-(-(-3)))...)$
powyżej jest po 100 par nawiasów i kresek pionowych
- d) $-|-(-(-(-7)))...|$
powyżej są po 2023 pary nawiasów i kresek pionowych

Zad. 4. Podane pytania zapisz symbolami matematycznymi. *Jaka liczba leży na osi w odległości:*

- a) 2 od liczby 5?
- b) 1 od liczby 0?
- c) 0 od liczby -5 ?
- d) -5 od liczby 4?

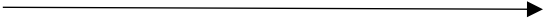


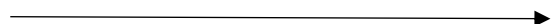
Zad. 5. Wymień wszystkie liczby, które są odpowiedzią do pytań z poprzedniego zadania.

- a)
- b)
- c)
- d)

Zad. 6. Podane pytania zapisz symbolami matematycznymi. *Jaka liczba leży w odległości:*

- a) większej od 1 od liczby 2?
- b) mniejszej od 3 od liczby -5 ?
- c) większej od 0 od liczby 7?
- d) mniejszej od -1 od liczby 0?

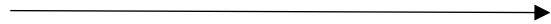



Zad. 7. Zaznacz na osi, gdzie leżą liczby, które są odpowiedzią do pytań z poprzedniego zadania.

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 

Zad. 8. Podane pytania zapisz symbolami matematycznymi. *Dla jakiej liczby suma jej odległości od liczb 2 i 3 jest:*

- a) równa 1?
- b) równa 2?
- c) większa od 1?.....
- d) większa od -1 ?.....

Zad. 9. Zaznacz na osi, gdzie leżą liczby, które są odpowiedzią do pytań z poprzedniego zadania.

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 

Zad. 10. Podaj wszystkie liczby, które spełniają podany warunek.

- a) $|x| = 7$
- b) $|-2| = x$
- c) $|-x| = 7$
- d) $|-x| = 7$
- e) $|x| = -7$
- f) $2+|x| = 3$
- g) $|-x-2| = 1$
- h) $2 \cdot |x| = 6$
- i) $\frac{|x|}{x} = 0$
- j) $|x-3| = 7$
- k) $|x-7| = -3$
- l) $|2x-10| = 2$
- m) $|-15-10x| = 5$
- n) $|x-6| = 0$
- o) $||x|-10| = 5$
- p) $||x|-3| = 4$
- r) $||x|-6| = 6$
- s) $||x|-9| = 0$
- t) $||x-2|-4| = 2$
- u) $||x|| = 2$
- w) $||x||=1$
- x) $||x-1|-1|-1|=1$

Zad. 11. Które z podanych liczb spełniają daną nierówność? Zakreśl je.

- a) $|x-3| < 6$ { -34, -7, -2, 0, 3, 8, 10, 18, 21, 89, 100 }
- b) $|x| > x$ { -18, -7, -3, -2, 0, 1, 9, 13, 886, 4239 }
- c) $|x-2| \leq 0$ { -2023, -30, -12, -8, -1, 2, 9, 11, 35, 88 }
- d) $|x| \leq x$ { -1410, -17, -7, -2, 0, 8, 20, 61, 70, 84 }
- e) $|x-7| > 0$ { -102, -33, -9, -4, 0, 2, 5, 55, 72, 136 }

Zad. 12. Wpisz TAK lub NIE w zależności od tego, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- a) Odległość liczby ujemnej n od zera jest liczbą położoną symetrycznie do n względem zera.
- b) Dowolna liczba nieujemna n jest równa swojej odległości od zera.
- c) Odległość liczby od zera nie może być większa niż 10 milionów.
- d) Odległość liczby od zera nie może być liczbą ujemną.
- e) Dowolnie duża liczba n spełnia warunek $|n| < 3$
- f) Żadna liczba ujemna n nie spełnia warunku $|n-3| < 7$
- g) Odległość liczby n od liczby -7 na osi wynosi $|n-7|$
- h) Odległość liczby 7 od liczby n na osi wynosi $|n-7|$
- i) Wszystkie odpowiednio duże liczby n spełniają nierówność $7 < |n|$
- j) Warunek $\frac{|n|}{n} = 1$ spełnia każda liczba całkowita poza zerem.
- k) Warunku $|n| = \frac{1}{2}n$ nie spełnia żadna liczba całkowita.
- l) Warunek $|-18-n| = 0$ spełnia jedna liczba całkowita.
- m) Dowolne liczby całkowite m i n spełniają warunek $|n-m| = |m-n|$

imię i nazwisko:..... szkoła:

Zad. 1. Ile wynosi podana liczba?

- a) $-(-(-1))$
 - b) $-(-(-(-(-5))))$
 - c) $-(-(-...-(-3))...)$
- w tym napisie jest 100 minusów
- d) $-(-(-...-(-7))...)$
- w tym napisie są 2023 minusy

Zad. 2. Ile wynosi podana liczba?

- a) $-|-|-1||$
 - b) $-|-|-|-|-|-|-5|||||$
 - c) $-|-|-...-|-3||...|$
- w tym napisie jest 100 minusów
- d) $-|-|-...-|-7||...|$
- w tym napisie są 2023 minusy

Zad. 3. Ile wynosi podana liczba?

- a) $-(-(-1))$
 - b) $|(-(-(-(-5))))|$
 - c) $-(-|-...-|-3|)...|$
- w tym napisie jest po 100 par nawiasów i kresek pionowych
- d) $-|-(-...-|-7|)...|$
- w tym napisie są po 2023 pary nawiasów i kresek pionowych

Zad. 4. Podane pytania zapisz symbolami matematycznymi. *Jaka liczba leży na osi w odległości:*

- a) 2 od liczby 5?
- b) 1 od liczby 0?
- c) 0 od liczby -5 ?
- d) -5 od liczby 4?

Zad. 5. Wymień wszystkie liczby, które są odpowiedzią do pytań z poprzedniego zadania.

- a)
- b)
- c)
- d)

Zad. 6. Podaj przykład liczby, która leży w odległości:

- a) większej od 1 od liczby 2:
- b) mniejszej od 3 od liczby -5 :
- c) większej od 0 od liczby 7:
- d) mniejszej od -1 od liczby 0:

Zad. 7. Podaj przykład liczby, takiej że suma jej odległości od liczb 2 i 3 jest:

- a) równa 1
- b) równa 2
- c) większa od 1
- d) mniejsza od -1

Zad. 8. Zapisz słowami, co oznaczają te zapisy symbolami matematycznymi.

- a) $|x| = 7$
-
-
- b) $|x-3| = 2$
-
-
- c) $|x-2| < 3$
-
-
- d) $|x-3| + |x-3| = 4$
-
-

Zad. 9. Podaj wszystkie liczby, które spełniają podany warunek.

- a) $|x| = 7$
- b) $|-2| = x$
- c) $|-x| = 7$
- d) $|x| = -7$
- e) $2+|x| = 3$
- f) $|-x-2| = 1$
- g) $2 \cdot |x| = 6$
- h) $\frac{|x|}{x} = 0$
- i) $|x-3| = 7$
- j) $|x-7| = -3$
- k) $|2x-10| = 2$
- l) $|-15-10x| = 5$
- m) $|x-6| = 0$
- n) $||x|-10| = 5$
- o) $||x|-3| = 4$
- p) $||x|-6| = 6$
- r) $||x|-9| = 0$
- s) $||x-2|-4| = 2$
- t) $||x|| = 2$
- u) $|||x|| = 1$

Zad. 10. Wpisz TAK lub NIE w zależności od tego, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- a) Odległość liczby ujemnej n od zera jest liczbą położoną symetrycznie do n względem zera.
- b) Dowolna liczba nieujemna n jest równa swojej odległości od zera.
- c) Odległość liczby od zera nie może być większa niż 10 milionów.
- d) Odległość liczby od zera nie może być liczbą ujemną.
- e) Dowolnie duża liczba n spełnia warunek $|n| < 3$
- f) Żadna liczba ujemna n nie spełnia warunku $|n-3| < 7$
- g) Odległość liczby n od liczby -7 na osi wynosi $|n-7|$
- h) Odległość liczby 7 od liczby n na osi wynosi $|n-7|$
- i) Wszystkie odpowiednio duże liczby n spełniają nierówność $7 < |n|$
- j) Warunek $\frac{|n|}{n} = 1$ spełnia każda liczba całkowita poza zerem.
- k) Warunku $|n| = \frac{1}{2}n$ nie spełnia żadna liczba całkowita.
- l) Warunek $|-18-n| = 0$ spełnia jedna liczba całkowita.
- m) Dowolne liczby całkowite m i n spełniają warunek $|n-m| = |m-n|$