

NOTATKI DO WYKŁADU

MŁO: Pojęcia kwadrat/sześcian/ 4 potęga liczby, kwadraty/sześciany kolejnych liczb, kolejne potęgi tej samej liczby.

MŁO/JUN: Potęga zerowa liczby (0^0), ciąg arytmetyczny, n -ta pochodna ciągu, notacja $P(0)$, $P'(2)$, $P^{IV}(3)$.

Operacja różnicy. Ciekawscy uczniowie często zauważają, że gdy wypiszą kwadraty kolejnych liczb naturalnych, różnice między nimi zachowują się bardzo regularnie – dają kolejne liczby nieparzyste. A jeśli obliczymy różnice między tymi różnicami, otrzymamy stałe 2. Po ponownym obliczeniu różnic dostajemy ciąg zer. Dalej obliczanie różnic nie ma sensu, wyjdą same zera.

0	1	4	9	16	25	LO/JUN: $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 = \Delta(n^2)$
	1	3	5	7	9	
		2	2	2	2	
			0	0	0	
				0	0	
					0	

Pomyślmy, co stanie się, gdy wyjdziemy nie od kwadratów kolejnych liczb, tylko od kwadratów powiększonych o 1 / 3 / 17? Sprawdź, że kiedy zaczniemy trójkąt od liczb 1, 2, 5, 10, 17, 26..., (n^2+1) , kolejne wiersze nie zmienią się, będą wyglądały tak samo, jak dla kwadratów.

1	2	5	10	17	26	LO/JUN: $(n+1)^2+a - (n^2+a) = 2n+1 = \Delta(n^2+1)$
	1	3	5	7	9	
		2	2	2	2	
			0	0	0	

A jeśli wyjdziemy od dowolnego ciągu liczb, a potem powiększymy jego wyrazy o tę samą liczbę?

a_1	a_2	a_3	a_4	a_1+17	a_2+17	a_3+17	a_4+17
r_1	r_2	r_3		r_1	r_2	r_3	

Ogólnie można powiedzieć, że jeśli do wszystkich liczb w pierwszym rzędzie dowolnego ciągu dodamy jakąś liczbę, to w następnych rzędach nic się nie zmieni. (**własność dodawania stałej**)
To tak, jakby dodawać „wyraz po wyrazie” całe tabelki liczbowe:

a_1	a_2	a_3	a_4	+	17	17	17	17
r_1	r_2	r_3			0	0	0	

Co zmieni się, jeśli do kwadratów kolejnych liczb naturalnych dodamy te kolejne liczby naturalne? Zaczniemy od 0^2+0 , 1^2+1 , 2^2+2 , 3^2+3 , 4^2+4 , 5^2+5 , ..., (n^2+n) :

0	2	6	12	20	30	LO/JUN: $(n+1)^2+n+1 - (n^2+n) = 2n+2 = \Delta(n^2+n)$
	2	4	6	8	10	
		2	2	2	2	

Teraz pierwszy rząd rośnie o n (w stosunku do ciągu kwadratów), a rząd różnic o 1 (o tyle rosną dodawane do kwadratów liczby), natomiast w niższych rzędach nic się nie zmienia. Znowu możemy dodawać całe tabelki wyraz po wyrazie (wychodzi to samo, co powyżej):

0	1	4	9	16	25	+	0	1	2	3	4	5
	1	3	5	7	9			1	1	1	1	1
		2	2	2	2			0	0	0	0	

A co będzie, jeśli do kwadratów kolejnych liczb będziemy dodawać kolejne liczby parzyste? Zaczniemy od 0^2+0 , 1^2+2 , 2^2+4 , 3^2+6 , 4^2+8 , 5^2+10 , ..., (n^2+2n) :

0	3	8	15	24	35
	3	5	7	9	11
	2	2	2	2	

$$\text{LO/JUN: } (n+1)^2 + 2n + 2 - (n^2 + 2n) = 2n + 3 = \Delta(n^2 + 2n)$$

Teraz pierwszy rząd wzrósł o $2n$ w stosunku do ciągu kwadratów, a rząd różnic o 2 (o tyle rosną dodawane do kwadratów liczby), natomiast w niższych rzędach nic się nie zmieniło. I znowu to samo wyjdzie z dodawanie tabelki wyraz po wyrazie:

0	1	4	9	16	25	+	0	2	4	6	8	10
	1	3	5	7	9			2	2	2	2	2
		2	2	2	2			0	0	0	0	

Można zauważyć, że jeśli w pierwszym rzędzie dodajemy dwa ciągi, to ciągi różnic uzyskane dla tych ciągów w drugim rzędzie także należy dodać. (**własność dodawania, czyli addytywność operacji różnicy**) Jeśli mamy ciągi (z różnicami):

a_1	a_2	a_3	a_4		b_1	b_2	b_3	b_4
	r_1	r_2	r_3			ρ_1	ρ_1	ρ_3

To dla ciągu: a_1+b_1 a_2+b_2 a_3+b_3 a_4+b_4 mamy:

$r_1+\rho_1$ $r_2+\rho_2$ $r_3+\rho_3$

Teraz zacznijmy nie od kwadratów tylko od ich dwukrotności / trzykrotności. Wtedy wszystkie liczby w trójkącie się podwoją / potroją i znowu w czwartym rzędzie otrzymamy same zera.

0	2	8	18	32	50	LO: $a(n+1)^2 - an^2 = a((n+1)^2 - n^2) = a(2n+1)$, JUN: $a=17$
	2	6	10	14	18	
		4	4	4	4	
			0	0	0	

A jeśli wyjdziemy od dowolnego ciągu liczb, a potem powiększymy jego wyrazy tyle samo razy?

a_1	a_2	a_3	a_4		$17 \cdot a_1$	$17 \cdot a_2$	$17 \cdot a_3$	$17 \cdot a_4$
	r_1	r_2	r_3		$17 \cdot r_1$	$17 \cdot r_2$	$17 \cdot r_2$	$17 \cdot r_3$

Ogólnie można powiedzieć, że jeśli wszystkie liczby w pierwszym rzędzie pomnożymy przez jakąś liczbę, to wszystkie liczby w następnych rzędach też musimy pomnożyć przez tę samą liczbę. (**własność mnożenia przez liczbę, czyli jednorodność operacji różnicy**)

JUN/LO: Wyrażenie, w którym niewiadoma n jest mnożona przez siebie lub przez liczbę nazywamy **jednomianem** np. $7n^2$, $2n$, a kiedy dodajemy jednomiany (i stałe), powstaje **wielomian**. Najwyższa potęga przy niewiadomej n nazywa się **stopniem wielomianu**. Stała, to wielomian stopnia 0.

Dopisywanie niższych rzędów (przez wyliczanie **różnic**) nazywamy **różniczkowaniem**. Spróbujmy na odwrót: do niższego rzędu dobieramy wyższy, co nazywa się **całkowaniem**.

Ćwiczenia z całkowania (do II rzędu dobieramy I rząd) – odgadywanie i sprawdzanie w tabelce

1) Jak dobrać ciąg, żeby w drugim rzędzie dostać ciąg o stałej różnicy?

Odp. a $a+r$ $a+2r$ $a+3r$ $a+nr$

Taki ciąg nazywamy ciągiem arytmetycznym (są to wartości wielomianów stopnia 1 wyliczone w kolejnych liczbach naturalnych).

2) Jak dobrać ciąg, by w drugim rzędzie dostać kolejne liczby parzyste?

Odp. Kwadraty dawały liczby nieparzyste, więc trzeba zmniejszyć je o 1, czyli od kwadratów odjąć n .

3) Jak dobrać ciąg, by w drugim rzędzie dostać kolejne liczby naturalne?

Odp. Połówki poprzednich liczb, czyli połówki kwadratów pomniejszonych o n , tzn. $n(n-1)/2$.

4) Jak dobrać ciąg, by w drugim rzędzie dostać wielokrotności 10?

Odp. Pięciokrotności kwadratów pomniejszonych o n , tzn. $10n(n-1)/2$.

5) Jak dobrać ciąg, by dostać ciąg kolejnych liczb kończących się na 3? (3, 13, 23,...)

Odp. To wielokrotności dziesiątek powiększone o 3, czyli tworzymy ciąg w pierwszym rzędzie jako pięciokrotności kwadratów pomniejszonych o n z dodanymi wielokrotnościami 3.

Podsumowanie. Budując trójkąt od I rzędu w dół, możemy go wyznaczyć jednoznacznie.

Spróbujmy budować trójkąt na odwrót, od dołu. Załóżmy, że mamy w rzędzie same zera. Co może być w rzędzie nad nim? To musi być stała ta sama liczba (wartości wielomianu stopnia 0), ale nie wiemy jaka (np. r). A co będzie rząd wyżej nad ciągiem stałym? Jakiś ciąg wartości wielomianu st. 1 (ciąg arytmetyczny). Znamy jego różnicę r , ale nie wiemy, od jakiej liczby się zaczyna (np. od a , czyli to wartości $rn+a$). Nad konkretnym ciągiem arytmetycznym znajduje się ciąg wartości wielomianu st. 2 i już potrafimy ten wielomian znaleźć: najpierw dobieramy współczynnik przy n^2 (ustalając długość różnicy), a potem ciągiem arytmetycznym, przesuwamy odpowiednio tę różnicę (dla dowolnego b mamy rn^2+an+b). Wzór w wyższym rzędzie możemy wyznaczyć tylko z dokładnością do stałej na końcu (bo zmiana / dodanie stałej nie zmienia trójkąta różnic).

A co będzie stało w jeszcze wyższych rzędach? Może sześciiany = ciągi wartości wielomianów st. 3?

A w jeszcze wyższych rzędach ciągi wartości wielomianów stopni 4, 5, ...?

Zacznijmy od ciągu sześciąt kolejnych liczb naturalnych i obliczmy różnice w kolejnych rzędach:

0	1	8	27	64	125	
	1	7	19	37	61	Czy to jest ciąg wartości wiel. st. 2? Sprawdźmy. To jest ciąg wartości wiel. st. 1 = $6n$ IV: $r=6$, III: $6n$, II: $6(n^2-n)/2+1 = 6n(n-1)/2+1 = 3n^2-3n+1$
		6	12	18	24	
			6	6	6	

W II rzędzie wartości w kolejnych liczbach się zgadzają. Co powinno stać w I rzędzie?

Różnice n^2 dają wartości wielomianu 3 stopnia $(n-1)n(2n-1)/6$ (sprawdź), różnice n dają wartości wielomianu $n(n-1)/2$, różnice 1 dają ciąg n zatem różnice $3n^2-3n+1$ da wielomian stopnia 3: $3(n-1)n(2n-1)/6 + 3n(n-1)/2 + n$ co po uproszczeniu daje n^3 .

Zastosowania. Potrzebujemy obliczyć wartości wyrażenia stopnia 3: $2n^3-n^2-4n+7$ dla liczb od 0 do 10. Nie mamy kalkulatora. To bardzo żmudne. Zacznijmy od najmniejszych liczb.

$0 \rightarrow 7$, $1 \rightarrow 2-1-4+7 = 4$, $2 \rightarrow 16-4-8+7 = 11$, $3 \rightarrow 54-9-12+7 = 40$

Dalej jest coraz trudniej, ale czas na magię. Wypiszmy otrzymane wyniki i obliczmy ich różnice:

7	4	11	40	
	-3	7	29	i różnice różnic i jeszcze raz
		10	22	
		12	12	

Teraz jesteśmy gotowi do wyliczania wartości początkowego wyrażenia w następnych liczbach naturalnych bez wykonywania mnożenia, tylko za pomocą trzech dodawań – dodajemy końcowe liczby wszystkich wierszy w trójkątnej tabelce: $12+22+29+40 = 103$ i to jest wartość wyrażenia dla 4. Sprawdź na kalkulatorze.

Czy podobnie łatwo można obliczyć wartości dla 5, 6, 7 itd.? Gdzie powinno być dopisane 103? W I wierszu. Możemy też dopisać w tabeli sumy pośrednie: $12+22 = 34$, $34+29 = 63$, $63+40 = 103$ i mając dodatkowy skośny wiersz i postępując analogicznie, wyliczyć kolejną wartość w I rzędzie: $12+34+63+103 = 212$ to jest wartość wyrażenia dla 5. Sprawdźcie.

7	4	11	40	103
-3	7	29	63	
10	22	34		
12	12			
0				

Jednocześnie uzupełniamy kolejny skos: $12+34 = 46$, $46+63 = 109$, $109+103 = 212$.

7	4	11	40	103	212
-3	7	29	63	109	
10	22	34	46		
12	12	12			

Czy wiecie już, jak obliczyć wartość wyrażenia dla 6, 7 i 8? Za każdym razem mamy wykonać tylko trzy dodawania i żadnego mnożenia!

Ćwiczenie. Spróbujmy teraz z innym wyrażeniem, np. $3n^2-3n+12$ lub $2n^4+n^3-3n^2+10n+5$.

Ile poziomów będą miały teraz „magiczne trójkąty”? Ile potrzeba dodawań, żeby wyliczyć wartość w następnej liczbie?

Uzasadnienie, dlaczego magia działa

MŁODZICY. Niech P to jakiś wielomian. Operator różnicy (ozn. Δ) działa tak: $\Delta(P(4)) = P(5) - P(4)$, $\Delta(P(8)) = P(8) - P(7)$. Możemy więc zapisać: $P(5) = P(4) + \Delta(P(4))$, $P(8) = P(7) + \Delta(P(7))$. Na tym właśnie polegała magia, aby obliczyć $P(6)$ dodawaliśmy $P(5)$ i $\Delta(P(5))$, czyli wartość wielomianu w 5 i wartość różnicy wpisanej wiersz poniżej. Tak dopisywaliśmy nowy skośny wiersz tabeli. Tu (*).

JUN/LO: Niech $P(n)$ – wielomian, $\Delta(P(n))$ – operator różnicy, który definiujemy jako $\Delta(P(n)) = P(n+1) - P(n)$, np. dla $P(n) = 2n^3 - n^2 - 4n + 7$ mamy $\Delta(P(4)) = P(5) - P(4) = 63$, $\Delta(P(3)) = P(4) - P(3) = 29$.

Ogólnie $\Delta(P(x)) = \Delta(2n^3 - n^2 - 4n + 7) = 2(n+1)^3 - (n+1)^2 - 4(n+1) + 7 - (2n^3 - n^2 - 4n + 7) = 6n^2 + 4n - 3$.

widać, że stopień wielomianu zmniejszy się o 1, bo odejmą się jednomiany $2n^3$

Ten nowy wielomian nazywamy **pochodną** wyjściowego i oznaczamy go $P'(n)$. Jego wartości w punktach 0, 1, 2, 3 zgadzają się z drugim wierszem w magicznym trójkącie.

Obliczmy pochodną tej pochodnej: $\Delta(P'(n)) = \Delta(6n^2 + 4n + 3) = 6(n+1)^2 + 4(n+1) + 3 - (6n^2 + 4n + 3) = 12n + 10$ i to jest **druga pochodna** wyjściowego wielomianu – oznaczamy ją przez $P''(n)$. Znowu stopień zmniejszył się o 1, a wartości drugiej pochodnej w punktach 0, 1, 2 dają trzeci wiersz trójkąta.

Obliczmy pochodną jeszcze raz: $\Delta(P''(n)) = \Delta(12n + 10) = 12(n+1) + 10 - (12n + 10) = 12$. To **trzecia pochodna** wyjściowego wielomianu i jej wartości w punktach 0, 1, 2 zgadzają się z trzecim wierszem trójkąta. Obliczanie dalszych pochodnych nie ma sensu, bo wyjdą same zera: $\Delta(P'''(n)) = \Delta(12) = 12 - 12 = 0$.

Skoro $\Delta(P(n)) = P(n+1) - P(n)$, to można zapisać $P(n+1) = P(n) + \Delta(P(n))$. Na tym polegała magia, aby obliczyć $P(6)$ dodawaliśmy $P(5)$ i $\Delta(P(5))$ albo $P(5)$ i $P'(5)$, czyli wartość wielomianu w 5 i wartość jego pochodnej w 5 (czyli liczby w ostatnim skośnym wierszu tabeli).

(*)

7	4	11	40	103	212	379
-3	7	29	63	109	167	
10	22	34	46	58		
12	12	12				
0	0					
0						

Tajemnica wyjaśniona.

Zadanie. Znajdź wielomian stopnia 4, który przyjmuje następujące wartości:

$$P(0) = 1, P(1) = 4, P(2) = 57, P(3) = 232, P(4) = 625.$$

Wiemy jak wygląda ten wielomian, nie wiemy tylko jakie liczby w nim występują:

$An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$. Można wstawić po kolei za n każdą z pięciu liczb naturalnych 0, 1, 2, 3, 4, przyrównać wynik kolejno do 1, 4, 57, 232, 625 i z tego układu pięciu równań z pięcioma niewiadomymi wyliczyć niewiadome A, B, C, D, E . Ale to żmudny i trudny sposób.

Spróbujmy metody magicznego trójkąta.

1	4	57	232	625
	3	53	175	393
		50	122	218
			72	96
				24

Czwarty rząd (czwarta pochodna) to wielomian stopnia 0 (stały) równy 24.

Trzecia pochodna jest o stopień wyższa (wiel. st. 1): $24n+72$ (wartości zgodne).

Druga pochodna jest o stopień wyższa (wiel. st. 2): $24n(n-1)/2+72n+50$

Pierwsza pochodna to ciąg wartości wiel. st. 3: $24n(n-1)(n-2)/6 + 72n(n-1)/2 + 50n(n-1) + 3$

Szukany wielomian st. 4 to: $24n(n-1)(n-2)(n-3)/24 + 72n(n-1)(n-2)/6 + 50n(n-1)/2 + 3n + 1$.

Uwaga. Wyliczaliśmy tu wartości wielomianów w liczbach naturalnych. Analogicznie możemy postąpić dla liczb wymiernych (obliczamy wartości co $1/2$, co $1/3$, co $1/4$ itd.). Nadal operator różnicy będzie zmniejszał stopień wielomianu o 1, a wyliczanie wartości w kolejnej liczbie będzie wymagało kilku dodawań (tytu, ile wynosi stopień wielomianu) bez żadnego mnożenia. Tak właśnie oblicza się pochodne (ilorazy różnicowe) znane ze szkoły. Nie da się tego zrobić dla liczb niewymiernych.

LO: Pochodne funkcji potęgowej

Kto już miał pochodną w szkole, jest przyzwyczajony, że $(ax+b)'=a$ i tak jest też w magicznym trójkącie. Ale dla wyższych stopni jest trochę inaczej. Sprawdziliśmy, że $\Delta(n^2) = 2n+1$ i że $\Delta(n^3) = 3n^2+3n+1$. Widać pewną regularność (trójkąt Pascala), ale nie jest to wygodne do obliczeń.

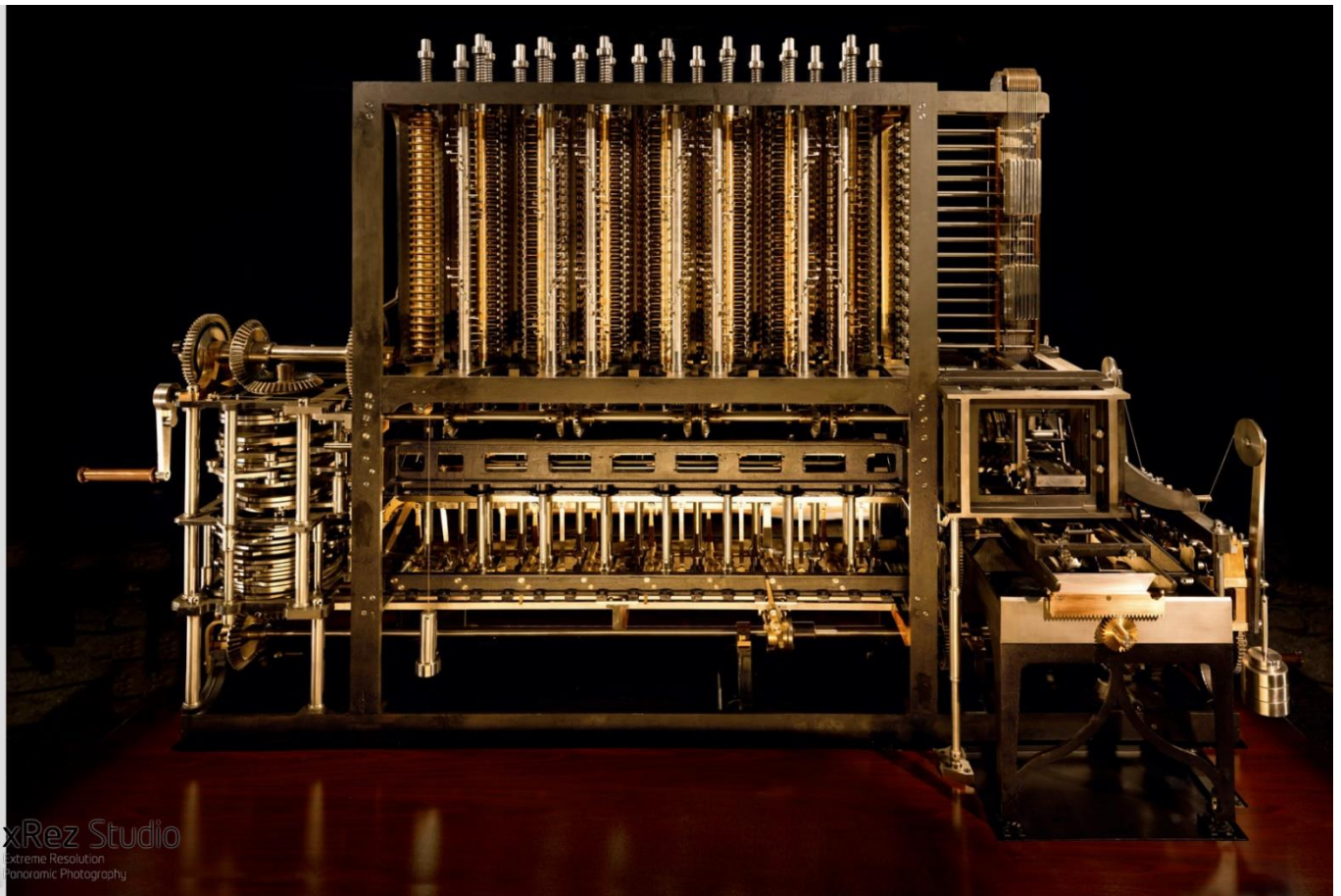
Sprawdźmy, co wyjdzie, gdy weźmiemy $\Delta(n(n-1)(n-2))$. Otrzymamy $(n+1)(n)(n-1) - (n)(n-1)(n-2) = (n)(n-1)[n+1 - n+2] = 3(n)(n-1)$. Jeżeli więc oznaczymy jakoś taką potęgę opadającą (tu podkreślnik), otrzymamy wygodne wyrażenie, a niektórym nawet znane: $\Delta_n(\underline{n^k}) = k\underline{n^{k-1}}$. Pozwala to wykonać także operację odwrotną. Czyli nad $6n(n-1)$ musi być $2n(n-1)(n-2)$.

Przykład.

Since we have the fundamental theorem, it's easy to determine that $\sum_{n:a \rightarrow b} n^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$. This immediately gives us things such as $\sum_{n:1 \rightarrow a} n^2 = \sum_{n:1 \rightarrow a} n^2 + n^1 = \frac{a^3 - 1^3}{3} + \frac{a^2 - 1^2}{2} = \frac{a(a-1)(a-2)}{3} + \frac{a(a-1)}{2} = \frac{a(a-1)(2a-4) + 3a(a-1)}{6} = \frac{a(a-1)(2a-1)}{6}$. But remember that this is actually the sum up to $(a-1)^2$. It then follows that $\sum_{i=1}^a i^2 = \frac{a(a+1)(2a+1)}{6}$.

W XIX wieku matematycy postanowili wykorzystać opisaną metodę do skonstruowania maszyny, która automatycznie będzie obliczała wartości wielomianów w kolejnych liczbach naturalnych. Na pomysł jako pierwszy wpadł niemiecki inżynier Johann Helfrich von Müller (1742–1830), a

zrealizował go angielski matematyki Charles Babbage (1791–1871). Maszyna jego konstrukcji zachowała się do dziś i jest przechowywana w Muzeum Nauki w Londynie. Był to pierwszy mechaniczny komputer.



imię i nazwisko: szkoła:

Zad. 1. Wypełnij pierwszy wiersz tabeli na podstawie podanego wzoru i uzupełnij pozostałe pola metodą różnicową.

a) $7n+3$

b) $3n^2+5$

c) n^3+2n+1

d) 2^n+3

Zad. 2. Uzupełnij brakujące liczby w podanych obok tabelkach metodą różnicową.

a)

7	8	11	16		
		0	0		

b)

3					
1					
2					
	0	0	0		

c)

1			19		51	
2	6					
			4			
					0	

d)

3	8	23			138	
		10		10		
		0				

e)

2	4	8	16			
				32		
		8				
			16			

MŁODZICY

Zad. 3. Dokończ podane zdanie, aby było prawdziwe.

Jeśli w 1. rzędzie tabelki...

a) stoi stale ta sama liczba, to w 2. rzędzie występują

.....

b) stoi niestały ciąg arytmetyczny, to same zera

wystąpią pierwszy raz w

c) stoją kwadraty kolejnych liczb, to w 3. rzędzie

stoją

d) stoją kolejne potęgi liczby 2, to rząd samych zer

.....

e) stoją podwojenia trzecich potęg kolejnych liczb,

to tabelka ma zera od

Zad. 4. Czy podane zdania o tabelkach różnicowych są prawdziwe? Wpisz TAK lub NIE.

a) Jeśli wszystkie liczby w 1. rzędzie zwiększymy
o 17, to w 2. rzędzie liczby także wzrosną o 17.

b) Jeśli wszystkie liczby w 1. rzędzie zwiększymy
17 razy, to liczby w 2. rzędzie wzrosną 17 razy.

c) Jeśli dodamy liczby w 1. rzędzie z dwóch
tabel, tworząc w ten sposób nową tabelkę tego
samego rozmiaru, to liczby w jej 3. rzędzie będą
sumami liczb z 3. rzędów początkowych tabel.

d) Jeśli w 1. rzędzie stoją kwadraty kolejnych
liczb powiększone o 1, to w 3. rzędzie stoją trójki.

e) Istnieje taki nieskończony ciąg liczb, dla
którego wszystkie rzędy tabelki wyglądają tak samo.

f) Istnieje taki nieskończony ciąg różnych liczb,
który ma w 2. rzędzie te same liczby co w 1. rzędzie.

Zad. 5. Jeśli w 1. rzędzie tabelki stoją wartości wyrażenia P , to jakie dwie liczby należy dodać, aby otrzymać:

a) wartość wyrażenia P w liczbie 13?

.....

b) wartość pierwszej pochodnej P w liczbie 2?

.....

c) wartość trzeciej pochodnej P w liczbie 5?

.....

d) wartość szóstej pochodnej P w liczbie 8?

.....

.....

Zad. 6. Podaj jakiś ciąg liczb, który w tabelce stoi w rzędzie powyżej podanego ciągu.

a) 0, 0, 0, 0, 0, ...

.....

b) 3, 3, 3, 3, 3, ...

.....

c) 6, 6, 6, 6, 6, ...

.....

d) 1, 3, 5, 7, 9, ...

.....

e) 0, 1, 2, 3, 4, ...

.....

f) 7, 17, 27, 37, 47, ...

.....

Zad. 7. Oblicz wartość n^3+3n^2+5 dla podanych n .

W przykładach e i f zapisz ostateczny wynik także jako sumę dwóch liczb z odpowiedniej tabelki.

a) $n=0$

b) $n=1$

c) $n=2$

d) $n=3$

e) $n=5$

f) $n=7$

JUNIORZY

Zad. 7. Dokończ podane zdanie, aby było prawdziwe.

Jeśli w 1. rzędzie tabelki...

a) stoi niestały ciąg arytmetyczny, to same zera

wystąpią pierwszy raz w

b) stoją kwadraty kolejnych liczb naturalnych, to

w 3. rzędzie stoją

c) stoją kolejne potęgi liczby 2, to rząd samych zer

.....

d) stoją podwojenia trzecich potęg kolejnych liczb, to

tabela ma zera od

e) liczby są co raz mniejsze, to w 2. rzędzie stoją

liczby

Zad. 8. Czy podane zdania o tabelkach różnicowych są prawdziwe? Wpisz TAK lub NIE.

a) Jeśli wszystkie liczby w 1. rzędzie zwiększymy
o 17, to w 2. rzędzie liczby także wzrosną o 17.

b) Jeśli wszystkie liczby w 1. rzędzie zwiększymy
17 razy, to liczby w 2. rzędzie wzrosną 17 razy.

c) Jeśli dodamy liczby w 1. rzędzie z dwóch
tabel, tworząc w ten sposób nową tabelkę tego
samego rozmiaru, to liczby w jej 3. rzędzie będą
sumami liczb z 3. rzędów początkowych tabel.

d) Jeśli w 1. rzędzie stoją kwadraty kolejnych
liczb powiększone o 1, to w 3. rzędzie stoją trójki.

e) Istnieje nieskończony ciąg liczb, dla którego
wszystkie rzędy tabelki wyglądają tak samo.

f) Istnieje nieskończony ciąg różnych liczb,
którego pochodna jest tym samym ciągiem.

g) Pochodna ciągu stałego jest ciągiem zer.

h) Druga pochodna niestałego ciągu arytmety-
cznego nie jest ciągiem zer.

i) Pochodna ciągu wartości wielomianu stopnia
2 jest ciągiem wartości wielomianu stopnia 1.

j) Trzecia pochodna ciągu wartości wielomianu
stopnia k jest ciągiem wartości wielomianu st. $k-3$.

Zad. 9. Podaj wielomian, którego wartości stoją w tabelce w rzędzie poniżej wartości podanego ciągu.

a) $n+5$

b) $2n+3$

c) n^2+1

d) $2n^2+n+2$

Zad. 10. Podaj dwa wielomiany, których wartości mogą stać w tabelce w rzędzie powyżej wartości podanego ciągu.

a) 7

.....

b) $n+1$

.....

c) $2n+3$

.....

d) n^2+1

.....

e) $2n^2+2n+2$

.....

Zad. 11. Odpowiedz na pytania.

a) Ile jest możliwych ciągów stopnia 2 stojących w
tabelce nad danym ciągiem stopnia 1?

.....

b) które spełniają a) i w zerze przyjmują wartość 0?

.....

c) które spełniają a) i w jedynce przyjmują wartość
jednocyfrową?

.....

d) które jednocześnie spełniają a), b) i c)?

.....

imię i nazwisko: szkoła:

Zad. 1. Uzupełnij metodą różnicową tabelki.

a)

7	8	11	16				
			2				
			0	0	0		

b)

-1							
2							
	-3						
	0	0		0	0		

c)

1			19		51		
2	6						
			4				
					0	0	

d)

2	4	8	16				
					32		
			8				
				16			

Zad. 2. Za pomocą tabelki oblicz n^3+3n^2+5 dla danych n . Zapisz wynik w postaci sumy dwóch liczb z tabelki.a) $n=4$ b) $n=7$ **Zad. 3. Ile co najmniej liczb trzeba wpisać do tabelki, aby dało się ją w uzupełnić do rzędu zer włącznie, jeśli w 1. rzędzie jest miejsce na:**

a) 8 wartości wielomianu st. 2

b) 6 wartości wielomianu st. 3

Zad. 4. Ile jest możliwych ciągów:

a) st. 2 stojących w tabelce nad danym ciągiem st. 1?

b) które spełniają a) i w zerze przyjmują wartość 0?

c) które spełniają a) i w jedynce przyjmują wartość jednocyfrową?

d) które jednocześnie spełniają a), b) i c)?

Zad. 5. Czy podane zdania o tabelkach różnicowych są prawdziwe? Wpisz TAK lub NIE.

a) Jeśli w 1. rzędzie stoją kwadraty kolejnych liczb powiększone o 1, to w 3. rzędzie stoją trójki.

b) Pochodna ciągu wartości wielomianu stopnia 2 jest ciągiem wartości wielomianu stopnia 1.

c) Trzecia pochodna ciągu wartości wielomianu stopnia k jest ciągiem wartości wielomianu st. $k-3$.

d) Istnieje nieskończony ciąg liczb, dla którego wszystkie rzędy tabelki wyglądają tak samo.

e) Istnieje nieskończony ciąg różnych liczb, którego pochodna jest tym samym ciągiem.

f) Jeśli $P(3)=5$ jest najmniejszą wartością ciągu w 1. rzędzie, to w 2. rzędzie znajdziemy zero.g) Jeśli wielomian z 1. rzędu tabeli ma minimum w liczbie całkowitej z przedziału $(0, 10)$, to w 2. rzędzie tabelki musi pojawić się 0.**Zad. 6. Dokończ podane zdanie, aby było prawdziwe.**

Jeśli w 1. rzędzie tabelki...

a) stoją sześciany kolejnych liczb naturalnych, to druga

pochodna jest

b) stoi ciąg okresowy, to czwarta pochodna jest

c) stoją kolejne potęgi liczby 5, to NWD wszystkich liczb

w niższych rzędach wynosi

d) stoi ciąg malejący, to w drugim rzędzie znajdują się

liczby

Zad. 7. Przedstaw podany wielomian w postaci wielomianu potęg opadających.a) n^2 b) $(n+2)(n-3)$ c) n^3-n^2+n d) n^3 e) n^4

SZKOŁY ŚREDNIE

Zad. 8. Podaj 2 wielomiany, których wartości mogą stać w tabelce w rzędzie powyżej wartości danego ciągu (wynik zostaw w postaci potęg opadających).

a) $2n+3$

.....

b) n^2+1

.....

c) n^2+n+1

.....

d) $2n^3+2n+2$

.....

Zad. 9. Podaj 2 wielomiany, których wartości mogą stać w tabelce 2 rzędy powyżej wartości danego ciągu (wynik zostaw w postaci potęg opadających).

a) $2n+3$

.....

b) n^2+1

.....

c) n^2+n+1

.....

d) $2n^3+2n+2$

.....

Zad. 10. Ile jest możliwych ciągów w 1. rzędzie, jeśli pytańnik oznacza jedną cyfrę (nie zawsze tę samą)?

a)

?						?
4						
-2						
0						
-2						
12						
-28						

b)

?					?		?
4							
-5				-11			-6
		10		21			

c)

?		??				?
		45				
	-5		15			
	-85		5	-18		

d)

?			1			?
0			?			1
		0		1		
		0				

Zad. 11. Jaś przez pomyłkę wpisał w 1. rząd tabelki co drugi wyraz ciągu 2 stopnia $P(n)$. Oblicz $P(1)$.

a)

0		
1	5	

b)

		4
	2	
	8	

Zad. 12. Jaś przez pomyłkę wpisał w 1. rząd tabelki co drugi wyraz ciągu 3 stopnia $P(n)$. Oblicz $P(1)$.

a)

1	39	205	595

b)

		4	
	2		
8			
	48		

Zad. 13. Ile wynosi podana suma? Wynik zostaw w postaci iloczynu.

a) $1^2 + 2^2 + \dots + 17^2$

b) $1^3 + 2^3 + \dots + 9^3$

c) $1^3 + 2^3 + \dots + 13^3$

d) $1^4 + 2^4 + \dots + 11^4$

KLUCZE

MŁODZICY

- a) 3 10 17 24 31, II rząd 7, III i IV rząd 0, b) 5 8 17 32 53, II rząd 3 9 15 21, III rząd 6, IV rząd 0
c) 1 4 13 34 73, II rząd 3 9 21 39, III rząd 6 12 18, IV rząd 6
d) 4 5 7 11 19, II rząd 1 2 4 8, III rząd 1 2 4, IV rząd 1 2
- a) 7 8 11 16 23 32, II rząd 1 3 5 7 9, III rząd 2, IV rząd 0
b) 3 4 7 12 19 28, II rząd 1, 3, 5, 7, 9, III rząd 2, IV rząd 0
c) 1 3 9 19 33 51 73, II rząd 2 6 10 14 18 22, III rząd 4, IV rząd 0
d) nie istnieje taka tabelka / zawiera błąd
e) 2 4 8 16 32 64 128, II rząd 2 4 8 16 32 64, III rząd 2 4 8 16 32, IV rząd 2 4 8 16
- a) same zera, b) 3. rzędzie, c) same dwójki, d) nigdy nie wystąpi, e) 5. rzędu
- a) N, b) T, c) T, d) N, e) T, f) T
- a) pochodna i wartość w 12 / $P(12)$ i $P'(12)$, b) druga i pierwsza pochodna w 1 / $P''(1)$ i $P'(1)$
c) czwarta i trzecia pochodna w 4 / $P^{IV}(4)$ i $P'''(4)$,
d) siódma i szósta pochodna w 7 / $P^{VII}(7)$ i $P^{VI}(7)$
- Za mniej niż 6 wyrazów 0. Sprawdzamy tylko 6.
 - a) dowolny stały, b) dowolny arytmetyczny o różnicy 3,
c) podwojenie poprzedniego lub dowolny arytmetyczny o różnicy 6,
d) kwadraty 0, 1, 4, 9, 16, 25 + dowolna stała, e) 0, 0, 1, 3, 6, 10 + dowolna stała / $n(n-1)/2+c$
f) 0, 7, 24, 51, 88, 135 / $5n(n-1)+7n+c$
- a) 5, b) 9, c) 25, d) 59, e) $205 = 88+117$, f) $495 = 166+329$

JUNIORZY

- a) 7 8 11 16 23 32, II rząd 1 3 5 7 9, III rząd 2, IV rząd 0
b) 3 4 7 12 19 28, II rząd 1, 3, 5, 7, 9, III rząd 2, IV rząd 0
c) 1 3 9 19 33 51 73, II rząd 2 6 10 14 18 22, III rząd 4, IV rząd 0
d) nie istnieje taka tabelka / zawiera błąd
e) 2 4 8 16 32 64 128, II rząd 2 4 8 16 32 64, III rząd 2 4 8 16 32, IV rząd 2 4 8 16
- a) $117 = 58+59$, b) $495 = 166+329$
- a) 1, b) 2, c) 3, d) żaden / to nie jest wielomian
- a) $7n+3$, b) $3n^2+5$, c) n^3+2n+1 , d) 2^{n+3}
- a) dowolny stały, b) dowolny arytmetyczny o różnicy 6 / $6n+c$
c) kwadraty 0, 1, 4, 9, 16, 25 + dowolna stała / n^2+c , d) $n(n-1)/2 + c$,
e) $5n(n-1)+7n+c$, f) $2^{n+1} + c$
- a) $P'(12)$ i $P(12)$, b) $P''(1)$ i $P'(1)$, c) $P^{IV}(4)$ i $P'''(4)$, d) $P^{VII}(7)$ i $P^{VI}(7)$, e) $P^{k+1}(n-1)$ i $P^k(n-1)$,
- a) 3. rzędzie, b) same dwójki, c) nigdy nie wystąpi, d) 5. rzędu, e) ujemne
- a) N, b) T, c) T, d) N, e) T, f) T, g) T, h) N, i) T, j) N
- a) 1, b) 2, c) $2n+1$, d) $4n+3$
- a) $7n + \text{stała}$, b) $n(n-1)/2+n + \text{stała}$ c) $n(n-1)+3n + \text{stała}$, d) $n(n-1)(n-2)/6 + n + \text{stała}$,
e) $n(n-1)(n-2)/3 + n(n-1) + 2n + \text{stała}$
- a) nieskończenie wiele, b) 1, c) 10, d) 0 lub 1

KLUCZE

LICEA

Zad. 1.

a)

7	8	11	16	23	32	43	56
1	3	5	7	9	11	13	
2	2	2	2	2	2	2	
0	0	0	0	0	0		

b)

-1	1	0	-4	-11			
2	-1	-4	-7				
-3	-3	-3					
0	0			0	0		

c)

1	3	9	19	33	51	73	99
2	6	10	14	18	22	26	
4	4	4	4	4	4	4	
0	0	0	0	0	0		

d)

2	4	8	16	32	64	128	
2	4	8	16	32	64		
2	4	8	16	32			
2	4	8	16				

Zad. 2. a) $117 = 58 + 59$, b) $495 = 166 + 329$

Zad. 3. a) 8, b) 6

Zad. 4. a) nieskończenie wiele, b) 1, c) 10, d) 0 lub 1

Zad. 5. a) N, b) T, c) N, d) T, e) T, f) N, g) N

Zad. 6. a) ciągiem arytmetycznym/ ciągiem wielokrotności szóstki /wielomianem st. 1/ wielomianem liniowym/ wielomianem $6n+6$, b) ciągiem okresowym, c) 4, d) ujemneZad. 7. a) $n(n-1)+n = n^2 + n^1$, b) $n^2-n-6 = n^2 - 6$ c) $n^3+2n^2+n^1$ d) $n(n-1)(n-2) + 3n^2-2n = n^3 + 3n^2 + n^1$ e) $n(n-1)(n-2)(n-3)+6n^3-11n^2+6n = n^4 + 6n^3 + 7n^2 + n^1$ Zad. 8. a) $n^2 + 3n^1 + C = n^2 + 2n + D$,c) $\frac{1}{3}n^3 + n^2 + n^1 + C = \frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3}n + D$,b) $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + n^1 + C = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n + D$,d) $\frac{1}{2}n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n^1 + C = \dots$ Zad. 9. a) $\frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + C = \dots$,c) $\frac{1}{12}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + C = \dots$,b) $\frac{1}{12}n^4 + \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + C = \dots$,d) $\frac{1}{10}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{2}{3}n^3 + n^2 + C = \dots$

Zad. 10. a) 2, b) 10, c) 5, d) 4

Zad. 11. a) 0, b) 4

Zad. 12. a) 10, b) 7

Zad. 13. a) $18 \cdot 17 \cdot 35 / 6 = 3 \cdot 17 \cdot 35 = 1785$,c) $14 \cdot 13 \cdot 182 / 4 = 7 \cdot 13 \cdot 91 = 8281$,b) $10 \cdot 9 \cdot 90 / 4 = 5 \cdot 9 \cdot 45 = 2025$ d) $12 \cdot 11 \cdot 9085 / 30 = 2 \cdot 11 \cdot 1817 = 39974$