Wskazówki do zadań na mecz matematyczny

1. Ile zer końcowych ma liczba $127! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 126\cdot 127$?

Zliczamy piątki w rozkładzie 127! na czynniki pierwsze. Piątek jest $25+5+1=31$. Stwierdzamy, że dwójek jest więcej niż piątek.

Odpowiedź: Liczba 127! ma 31 zer końcowych.

2. Rozstrzygnij, która liczba jest większa: $4\cdot\sqrt[3]{2}-5$ czy $1/25$?

Ze wzoru na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$4\cdot\sqrt[3]{2}-5=\frac{128-125}{128^{2/3}+128^{1/3}\cdot 125^{1/3}+125^{2/3}}<\frac{3}{125^{2/3}+125^{1/3}\cdot 125^{1/3}+125^{2/3}}=\frac{1}{25}\,.$$

Odpowiedź: Większa jest liczba 1/25.

3. Udowodnij, że liczba $20190\cdot 20191\cdot 20192\cdot 20193+1$ jest złożona.

Z tożsamości

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$$

wynika, że podana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Uwaga: Podana w zadaniu liczba jest kwadratem liczby pierwszej 407696671.

4. Ile jest takich liczb całkowitych dodatnich $n<10\,000$, że liczba n^n jest ósmą potęgą liczby całkowitej?

Liczba n^n jest ósmą potęgą liczby całkowitej, gdy zachodzi co najmniej jeden z następujących trzech warunków:
1° liczba n jest podzielna przez 8,
2° liczba n jest ósmą potęgą,
3° liczba n jest kwadratem liczby parzystej.

Zliczamy:
1° Liczb dodatnich $n<10\,000$ podzielnych przez 8 jest 1249 (w tym jest liczba 2^8 oraz kwadraty liczb podzielnych przez 4).
2° Ósme potęgi, których nie liczyliśmy w **1**°, są dwie: 1 i 3^8.
3° Kwadratów liczb parzystych niepodzielnych przez 4 jest 25.

Odpowiedź: Jest 1276 liczb spełniających warunki zadania.

5. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$x^3y+xy^3\leqslant x^4+y^4\,.$$

Sposób I:

Korzystając dwukrotnie z nierówności

$$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$$

otrzymujemy

$$x^3y\leqslant\frac{x^4+x^2y^2}{2}\leqslant\frac{x^4+\frac{x^4+y^4}{2}}{2}=\frac{3x^4+y^4}{4}$$

i podobnie

$$xy^3\leqslant\frac{x^4+3y^4}{4}\,.$$

Dodanie stronami powyższych dwóch nierówności daje nierówność z treści zadania.

Sposób II:

Przepisujemy daną nierówność w postaci równoważnej:

$$0\leqslant x^4+y^4-x^3y-xy^3\,,$$
$$0\leqslant x^3\cdot(x-y)+y^3\cdot(y-x)\,,$$
$$0\leqslant\left(x^3-y^3\right)\cdot(x-y)$$

i zauważamy, że czynniki po prawej stronie ostatniej nierówności są tego samego znaku.

6. Kwadratowa plansza o boku 60 jest podzielona na kwadraty jednostkowe zwane polami. Na planszy ułożono pewną liczbę prostokątnych klocków o wymiarach 1×11 tak, aby każdy z nich dokładnie przykrywał 11 pól, a przy tym żadne pole nie jest przykryte przez więcej niż jeden klocek. Udowodnij, że co najmniej 25 pól zostało niepokrytych.

Standardowe numerowanie: 1 w lewym górnym rogu oraz cyklicznie 1,2,3,4,…,11 w rzędach poziomych i pionowych. Liczby 10 i 11 występują po 325 razy, więc można ułożyć co najwyżej 325 klocków pokrywających 3575 pól, a więc 25 zostaje niepokrytych.

7. Rozstrzygnij, czy istnieje trójkąt równoramienny, który można podzielić na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, aby żadne dwa z tych trzech trójkątów (jeden duży trójkąt i dwa trójkąty podziału) nie były podobne.
Uwaga: Dwa trójkąty są podobne, jeśli miary kątów jednego są takie same jak miary kątów drugiego.

Tak. Niech $\alpha=180^\circ/7$. Wówczas trójkąt równoramienny o kątach α, 3α, 3α dzielimy odpowiednią trójsieczną kąta 3α na trójkąty o kątach α, α, 5α oraz 2α, 2α, 3α.

Jest to jedyny przykład spełniający warunki zadania.

8. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw ma długość 5, a pozostałe trzy boki mają długość 4. Oblicz długość przekątnych tego trapezu.

Rzut wierzchołka krótszej podstawy na dłuższą dzieli dłuższą podstawę na odcinki $1/2$ i $9/2$.

Obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:
Wysokość trapezu:

$$h=\sqrt{4^2-(1/2)^2}=\frac{\sqrt{63}}{2}\,.$$

Przekątna:

$$\sqrt{h^2+(9/2)^2}=\frac{\sqrt{63+81}}{2}=\frac{\sqrt{144}}{2}=6\,.$$

Odpowiedź: Przekątne trapezu mają długość 6.

9. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30°, a ponadto $AC=11$ oraz $BC=7$. Wyznacz wszystkie możliwe wartości, jakie może przyjmować długość boku AB.

Wysokość trójkąta opuszczona na prostą AB ma długość

$$h=\frac{AC}{2}=\frac{11}{2}\,.$$

Jeśli D jest spodkiem tejże wysokości, to z twierdzenia Pitagorasa:

$$BD=\sqrt{BC^2-h^2}=\sqrt{7^2-(11/2)^2}=\frac{\sqrt{196-121}}{2}=\frac{\sqrt{75}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ponieważ

$$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AC=\frac{11\sqrt{3}}{2}\,,$$

otrzymujemy

$$AB=AD\pm BD=\frac{11\sqrt{3}\pm 5\sqrt{3}}{2}=\frac{11\pm 5}{2}\cdot\sqrt{3}\,.$$

Odpowiedź: Bok AB może mieć długość $3\sqrt{3}$ lub $8\sqrt{3}$.

10. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABO. Wyznacz wszystkie możliwe wartości miary kąta $\sphericalangle ACB$, jeśli wiadomo, że $\sphericalangle APB=\sphericalangle ACB+30^\circ$.

Dwukrotnie korzystamy z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym pamiętając o dwóch różnych wersjach (kąt wpisany ostry/rozwarty). W każdym z 4 przypadków układamy i rozwiązujemy odpowiednie równanie.

Odpowiedź: Kąt $\sphericalangle ACB$ może mieć miarę 10°, 66°, 130° lub 138°.