XX Mistrzostwa Polski w Geometrii Elementarnej
Wrocław, 4 czerwca 2022

Zad. 1. W trójkącie prostokątnym *ABC* na przeciwprostokątnej *AB* obrano punkt *D* tak, że $|BD| = |AC|$. Wykaż, że w trójkącie *ACD* dwusieczna *AL*, środkowa *CM* i wysokość *DH* przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 2. W trójkącie *ABC* na boku *AB* obrano punkt *K* i poprowadzono dwusieczną *KE* w trójkącie *AKC* oraz wysokość *KH* w trójkącie *BKC*. Okazało się, że kąt *EKH* jest prosty. Oblicz długość *BC*,wiedząc, że $|HC| = 5$.

Zad. 3. Na wysokości *BD* trójkąta *ABC* obrano punkt *E* tak, że kąt *AEC* jest prosty. Niech O_1 i O_2 będą środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach *AEB* i *CEB*. Niech *F* i *L* będą środkami odcinków odpowiednio *AC* i O_1O_2. Wykaz, że punkty *L*, *E* i *F* leżą na jednej prostej.

Zad. 4. W trójkącie *ABC* mamy: $|\measuredangle B| = 20°$, $|\measuredangle C| = 40°$, a długość odcinka dwusiecznej zawartego w trójkącie $|AD| = 2$. Oblicz $|BC| - |AB|$.

Zad. 5. Na przedłużeniu podstawy trójkąta równoramiennego obrano dowolny punkt. Wykaż, że różnica odległości tego punktu od prostych zawierających ramiona trójkąta jest równa wysokości opuszczonej z wierzchołka należącego do podstawy.

Zad. 6. Wykaż, że w trójkącie *ABC* dwusieczna kąta *A*, linia łącząca środki boków AB i BC oraz prosta przechodząca przez punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z bokami *CB* i *CA* przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 7. W czworokącie wypukłym *ABCD* przekątne mają długości $|AC| = 26$ i $|BD| = 28$. Odległość środków boków *AB* i *CD* wynosi 15. Oblicz pole czworokąta.

Zad. 8. W kwadracie *ABCD* punkt *E* jest środkiem boku *BC*. Symetralne odcinków *AE* i *CE* przecinają się w punkcie *O*. Znajdź a) miarę kąta *AOE*, b) stosunek $|BO|:|OD|$.

Zad. 9. W trójkącie *ABC* kąt *C* jest prosty, a *D* jest spodkiem wysokości na przeciwprostokątnej. Na płaszczyźnie *ABC* obrano punkt *K* tak, że $|AK| = |AC|$. Wykaz, że średnica okręgu opisanego na trójkącie *ABK* przechodząca przez *A* jest prostopadła do prostej *DK*.

Zad. 10. Prosta przecina boki *AB*, *BC* i przedłużenie boku *AC* trójkąta *ABC* odpowiednio w punktach *D*, *E* i *F*. Wykaż, że środki odcinków *DC*, *AE* i *BF* leżą na jednej prostej (zwanej prostą Gaussa).

Zad. 11. W trapezie *ABCD*, krótsza podstawa *CD* i ramiona *AD* oraz *BC* mają tę samą długość. Z wierzchołka *C* opuszczono wysokość *CE* na podstawę *AB*. Na przekątnej *AC* dany jest punkt *F* taki, że kąt *EFC* jest prosty. Niech *G* będzie punktem wspólnym przekątnej *BD* i odcinka *EF*. Znajdź stosunek $|DB|:|DG|$.

Zad. 12. W kwadracie *ABCD* na bokach *BC* i *CD* obrano odpowiednio punkty *K* i *N* tak, że $|AK| = |BK| + |DN|$. Wykaż, że *AN* jest dwusieczną kąta *DAK*.

Powodzenia!