MIĘDZYREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY GIMNAZJÓW
DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE – WIELKOPOLSKA
Gdańsk, 9 czerwca 2017

Zad. 1. Danych jest 5 odcinków o długościach 1, 3, 5, 7 i 9 jednostek. Na ile sposobów można wybrać spośród nich trzy różne odcinki, które będą wysokościami jednego trójkąta?

Zad. 2. Rozwiąż równanie $x^2 – 42y^2 = 1$ w parach liczb pierwszych.

Zad. 3. W trapezie o podstawach długości a i b poprowadzono odcinek równoległy do podstaw przez punkt przecięcia przekątnych. Oblicz jego długość.

Zad. 4. Tworzymy zbiór dzielników pierwszych wszystkich, różnych od 0, liczb o zapisie dziesiętnym $\underline{xyxyxy}$. Jaki jest największy element tego zbioru?

Zad. 5. Ile jest liczb sześciocyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, o różnych cyfrach, takich, że cyfry 5 i 6 stoją obok siebie oraz pomiędzy nimi a cyfrą 1 stoją co najmniej dwie cyfry?

Zad. 6. Oblicz sumę cyfr liczby $99\ldots9^2$, gdzie w podstawie jest sto dziewiątek.

Zad. 7. Wykaż, że jeśli a i b są długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, zaś c długością jego przeciwprostokątnej, to $a^n + b^n < c^n$ dla wszystkich liczb naturalnych $n > 2$.

Zad. 8. Niech x i y są dodatnimi liczbami całkowitymi. Ostatnia cyfra liczby $x^2 + xy + y^2$ w zapisie dziesiętnym jest równa 0. Jaka jest przedostania cyfra tej liczby?

Zad. 9. W 2017-kącie wypukłym narysowano pewną liczbę przekątnych w taki sposób, że żadne dwie się nie przecinają. W rezultacie podzielono wielokąt na 2015 trójkątów. Czy jest możliwe, aby bokami dokładnie 1007 spośród tych trójkątów były wyłącznie przekątne?

Zad. 10. Ile wynoszą długości krawędzi takiego graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego i ścianach bocznych będących prostokątami, którego suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24 a którego pole powierzchni bocznej jest największe?

Zad. 11. Oblicz $3a/(a+b)$, jeśli wiesz, że $(a+b)/b = {}^1/_4$.

Zad. 12. Czy istnieją dwie potęgi dwójki różniące się tylko kolejnością cyfr?

SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Wysokości, są różne, więc szukany trójkąt będzie różnoboczny, przy czym najdłuższy bok będzie odpowiadał najkrótszej wysokości. Niech $a<b<c$, wówczas musi zajść $a+b>c$, a skoro $2P=ah_a=bh_b=ch_c$, to warunek przyjmuje równoważną postać $1/h_a + 1/h_b > 1/h_c$. Teraz sprawdzamy trójki (9, 7, 5) – ok, (9,7,3) – źle, więc (9, 7, 1) już nie sprawdzamy. Dalej (7, 5, 3) – ok, (7, 5, 1) – źle itd. Ostatecznie warunek spełniają dwie trójki.

2. Z równania wynika, że x jest nieparzyste. Dane równanie jest równoważne równaniu $42y^2 = x^2–1.= (x–1)(x+1)$, więc $42y^2$ dzieli się przez 4 (jako iloczyn liczb parzystych $x–1$ i $x+1$). To oznacza, że $2|y$, czyli równanie spełnia jedna para liczb pierwszych $x = 13$ i $y = 2$.

3. Niech trapez to $ABCD$ i odcinek równoległy do podstaw EF podzielony jest punktem przecięcia przekątnych P na kawałki o długościach x i y. Przez P poprowadźmy równoległą do ramienia AD, która przecina podstawy trapezu w punktach R i S. Powstają 2 pary trójkątów podobnych: PAB i PCD (w skali $a:b = h_a:h_b$) oraz RBP i SPD (w skali $h_a:h_b= a–x : x$). Z równości skal mamy $x=ab/(a+b)$. Analogiczne rozumowanie daje $y=ab/(a+b)$. Stąd $x+y = 2ab/(a+b)$, co jest średnią harmoniczną a i b. Za bardziej skomplikowane rachunki odjąć 2 pkt.

4. Każdą liczbę $\underline{xyxyxy}$ można zapisać jako iloczyn $10101\cdot\underline{xy} = 3\cdot7\cdot13\cdot37\cdot\underline{xy}$. To oznacza, że poszukiwaną liczbą jest 97.

5. Jeśli 5 jest po lewej stronie 6, to mamy możliwe układy: 56AB1C, 56ABC1, A56BC1, 1AB56C, 1ABC56, A1BC56. Każdy daje 6 możliwości wypełnienia miejsc A, B, C liczbami 2, 3, 4, czyli razem mamy 36 możliwości. Drugie tyle dla wariantu z 6 z lewej strony 5. Ostatecznie, mamy 72 możliwości.

6. Zauważmy, że $99\ldots9^2=(10^{100}–1)^2 = 10^{200}–2\cdot10^{100}+1 = 99\ldots9800\ldots01$, gdzie 9 i 0 jest po 99. Stąd suma cyfr tej liczby jest równa: $9\cdot99+8+1 = 9\cdot100 = 900$.

7. Z twierdzenia Pitagorasa mamy $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$. Wiemy również, że $a/c < 1$ oraz $b/c < 1$. Wówczas $(a/c)^n < (a/c)^2$ oraz $(b/c)^n < (b/c)^2$, co daje tezę.

8. Liczby x i y muszą być parzyste (w przeciwnym razie suma 3 liczb nieparzystych byłaby parzysta). Jeśli jedna z nich jest wielokrotnością 10, a druga nie, to liczba $x^2 + xy + y^2$ nie jest wielokrotnością 10. Jeśli żadna z liczb x i y nie jest wielokrotnością 10, to x^2 i y^2 w zapisie dziesiętnym kończą się cyfrą 4 lub 6 i można sprawdzić (rozpatrując przypadki), że $x^2 + xy + y^2$ nigdy nie będzie wielokrotnością 10. Stąd wniosek, że obie liczby x i y są wielokrotnościami 10, a $x^2 + xy + y^2$ jest wielokrotnością 100.

9. W każdym z trójkątów powstałego podziału co najwyżej dwa boki wielokąta mogą być bokami tego trójkąta. Wśród 2015 trójkątów podziału musi być więc co najmniej 1008 trójkątów o boku, który nie jest przekątną. To oznacza, że nie znajdziemy 1007 trójkątów o podanej własności.

10. Niech a oznacza długość krawędzi podstawy, zaś h wysokość graniastosłupa. Wtedy $12a + 6h = 24$, $2a+h = 4$. $P(a) = 6a(4 - 2a) = 24a - 12a^2 = -12(a-1)^2 + 12$ osiąga największą wartość dla $a = 1$.

11. Z założenia wynika, że $a/b = -{}^3/_4$. Zatem $3\cdot a/(a+b) = 3\cdot(a/b) /(a/b+1) = -9$.

12. Niech $n<m$ potęgi dwójki i wzajemne anagramy. Wówczas $m=2n$ lub $4n$ lub $8n$ (dalsze nie miałyby już tyle samo cyfr). Wtedy $m–n = n$ lub $3n$ lub $7n$ i dzieli się przez 9 (bo obie sumy cyfr dają tę samą resztę z dzielenia przez 9, wiec liczby też). W każdym wypadku wynika, że n dzieli się przez 3, co daje sprzeczność, bo n jest potęgą dwójki. Zatem nie ma takich liczb.