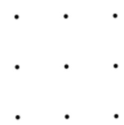
MIĘDZYREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY LICEÓW
DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE – WIELKOPOLSKA
Wrocław, 30 maja 2016

Zad. 1. Niech m będzie dodatnią liczbą naturalną. Rozwiąż poniższy układ równań z parametrem m w parach liczb całkowitych.

$$13x + 11y = 700$$
$$y = mx - 1.$$



Zad. 2. Na płaszczyźnie narysowano dziewięć punktów w taki sposób, że tworzą regularną siatkę 3×3 jak na rysunku. Ile można narysować różnych trójkątów o wierzchołkach w tych punktach?

Zad. 3. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach $|AB|=112$, $|CD|=40$ i ramionach długości x. Wiadomo, że pewien okrąg o środku leżącym na podstawie AB jest styczny do ramion trapezu. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość x^2.

Zad. 4. Jaka jest najmniejsza liczba mnożeń potrzebna do wyznaczenia a^{15} dla danej liczby a?

Zad. 5. W laboratorium Instytutu Gier Losowych przeprowadzono kosztowny eksperyment polegający na stukrotnym rzucie superwyważoną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyników wyniosła 202, jeśli ani razu nie wypadła liczba nieparzysta?

Zad. 6. Znajdź wszystkie funkcje f o dziedzinie $\mathbf{R}$ spełniające dla każdego x i y poniższy warunek.

$$f(x)f(y)+1 = f(x)+f(y)+xy.$$

Zad. 7. Na przeciwrozwartokątnej trójkąta rozwartokątnego znajdź punkt, którego odległość od wierzchołka kąta rozwartego jest średnią geometryczną długości odcinków, na jakie ów punkt dzieli przeciwrozwartokątną.

Zad. 8. Na papierze w kratkę rozważamy prostokąt o długościach boków a i b kratek (a i b to dodatnie liczby naturalne), o wierzchołkach w węzłach sieci kratowej i bokach równoległych do boków kratek. Wyznacz liczbę kratek, których wnętrza przecina przekątna tego prostokąta.

Zad. 9. W zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowano działanie * spełniające następujące prawa:

1) dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $x*x=0$,
2) dla każdych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi $x*(y*z) = (x*y) + z$.

Ile wynosi 20*16?

Zad. 10. Rozważmy wielokąt F. Wybierzmy dwa środki jednokładności O_1 i O_2 oraz dwie skale s_1 i s_2. Przekształcając F najpierw w jednokładności (O_1, s_1), a potem w (O_2, s_2), otrzymujemy kolejno wielokąty F_1 i F_2. Czy można tak wybrać F i punkty O_1, O_2, aby dla pewnych liczb s_1 i s_2 z przedziału $(0, 1)$ wielokąty F_1 i F_2 całkowicie pokryły F?

Zad. 11. Znajdź liczbę pierwszą p, która powiększona o 64 jest sześcianem liczby naturalnej.

Zad. 12. W wierzchołkach sześcianu umieszczono siedem zer i jedynkę (w każdym po jednej). W jednym ruchu wybieramy jedną z krawędzi i liczby znajdujące się na jej końcach zwiększamy o jeden. Po ilu co najmniej ruchach wszystkie liczby w wierzchołkach będą podzielne przez 3?