

Co zobaczyła Alicja po drugiej stronie lustra?

czyli rzecz o orientacji

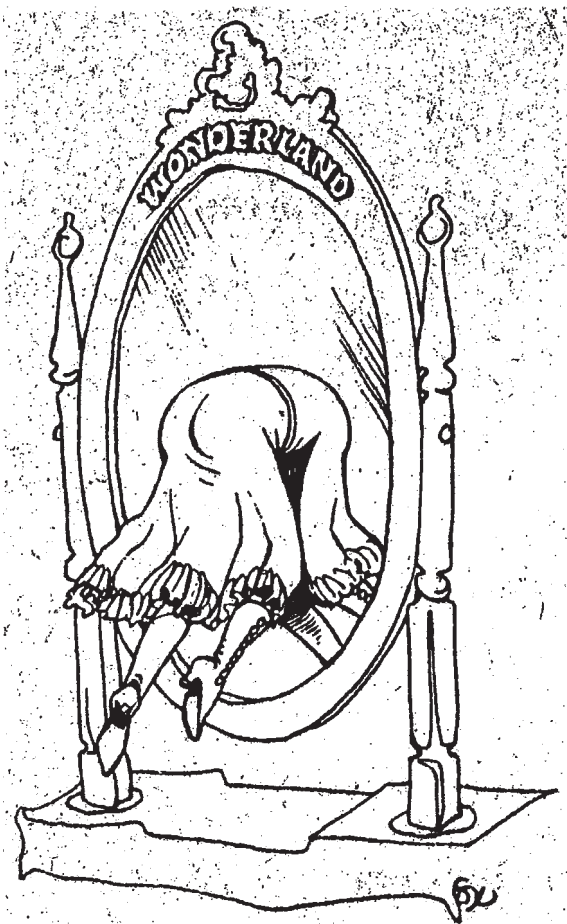
Marek Kordos

Lustereczko, powiedz przecie...	1
Przeszukujemy szuflady	2
Orientujemy Alicję	4
A co na to przyroda?	7
Rytmy – szlaczek	8
Rytmy – posadzka	9
Rytmy – kryształ	11
O niemożności słów kilka	12
Tylko dla dorosłych: co ze Wszechświatem?	14
★ ★ ★	
Jeszcze odrobina komentarzy	16

Chciałbym opowiedzieć o najtrudniejszym pojęciu matematyki. Najtrudniejszym, choć intuicyjnie prostym i używanym powszechnie również przez niematematyków. Chodzi o orientację.

Lustreczko, powiedz przecie...

Zacznijmy od jednego z najbardziej znanych matematyków – chodzi o Charlesa L. Dodgsona (1832–1898), studenta, a później profesora Christ Church College w Oxfordzie. Oczywiście, spieszę uspokoić tych, którzy nie odnajdują w swojej pamięci takiego matematyka: Charles Dodgson nie jest znany jako matematyk i, na dodatek, nie jest znany pod swoim nazwiskiem. To Lewis Carrol, którego dwie książeczki – *Alice's Adventures in Wonderland* (1865) i *Through the Looking Glass* (1875) – należą do (przynajmniej europejskiego) kanonu lektur dziecięcych. Pierwsza z nich ma ustaloną polską wersję tytułu: *Alicja w krainie czarów*, druga zaś znana jest w Polsce pod różnymi tytułami, wśród których jest i *Co zobaczyła Alicja po drugiej stronie lustra?*



TO jasne! — Alicja po drugiej stronie lustra zobaczyła siebie

No właśnie – co zobaczyła? Nasuwająca się odpowiedź to: zobaczyła siebie. Każdy jednak, kto np. próbował z pomocą lustra coś sobie obciąć, powiedzmy wąsy albo grzywkę, wie, że napotykamy przy takiej czynności pewne trudności i nasza sprawność sterowania ruchami widzianych w lustrze nożyc jest znacznie naruszona. W ogóle wydaje się, że trzymane w prawej ręce nożyce w lustrze trzymamy w ręce lewej.

Pozwala to postawić hipotezę, że lustro zamienia prawą i lewą stronę. Każdy zresztą chętnie poprze ten pogląd, uważając przy tym, że wie to od dziecka. Jeśli jednak mamy umysł przenikliwy i zwyczaj zadawania sobie i innym pytania *dlaczego?*, natychmiast zaczniemy poszukiwać odpowiedzi, dlaczego akurat prawą i lewą, a nie, powiedzmy, dół i górę.

Ufni w potęgę poznawczą doświadczeń możemy wykonać eksperyment: z nagłą, aby kompletnie zaskoczyć lustro, obróćmy je o 90°. Okaże się, że lustro dalej będzie zamieniało prawą i lewą, choć teraz będą one wypadały w tych akurat miejscach lustra, w których poprzednio znajdowały się niezamieniane dół i góra.

I tak pytanie staje się poważne, jak każde pytanie, na które nie umiemy dać zadowalającej odpowiedzi.

Właściwa odpowiedź jest zaskakująca: lustro nie zamienia prawej i lewej. Wydaje się to bzdurą, choć jest prawdą. Zrozumienie tej prawdy jest rzeczą trudną, bo też nie leży ona w optyce, ale głęboko w strukturze używanych przez nas pojęć, właściwie wręcz w filozofii.

Przeszukujemy szuflady

Chodzi o to, że używane przez nas pojęcia pochodzą „z różnych szuflad”. Każdy, oczywiście, uzna, że *prostopadłość* i *posłuszeństwo* to pojęcia o różnym pochodzeniu – wywodzą się one z zupełnie odmiennych kręgów doświadczeń. Okazuje się jednak, że różne pochodzenie mogą mieć również pojęcia dotyczące tego samego obszaru działania. Dla ilustracji przytoczę trzy przykłady. Pierwszy będzie dotyczył etyki, drugi geografii, a trzeci geometrii.

Przykład Ia - dla początkujących. Gdy podczas gry w piłkę na podwórku (bo nie wszyscy mają jeszcze orliki pod bokiem) zostanie wybita szyba, Pan Gospodarz będzie się starał wymusić na nas informację, kto strzelił tę „bramkę”. Do wyboru mamy albo zachować się jak praworządny obywatel i wskazać winowajcę, albo zachować się jak lojalny kolega i go nie wskazywać. I żadne rozumowanie nie pomoże nam zdecydować, co zrobić, bo *prawo* i *koleżeństwo* są z różnych szuflad (i nie zawsze się zgadzają). Nie ma więc możliwości, by rozum odpowiedział nam w tej sytuacji, co zrobić należy. A cokolwiek zrobimy, zawsze obciążymy tym swoje sumienie.

Przykład Ib - to samo dla zaawansowanych. W okresie największego rozkwitu Starożytnych Aten działała grupa filozofów nazywających się sofistami. Podstawowym kierunkiem ich dociekań było badanie reguł prowadzenia dyskusji.

W szczególności interesowało ich, jak można wygrać debatę niezależnie od tego, jakie racje się głosi i jakie racje ma do przedstawienia kontrdyskutant. Swoje przemyślenia potrafili też zastosować praktycznie, udzielając (cóż tu ukrywać – odpłatnie) porad politykom, na co w demokratycznym systemie Aten było duże zapotrzebowanie. Sofistą – należącym do końcowego okresu ich działalności – był Sokrates. Jego końcowa konkluzja była taka, że gdy za przesłanki naszego wyводу przyjmujemy jedno stwierdzenie z zakresu prawa naturalnego, a drugie stwierdzenie z zakresu prawa moralnego, wówczas będziemy mogli uzasadnić zupełnie dowolną tezę. Na przykład, jeśli w debacie będziemy powoływać się z jednej strony na wolny rynek i konkurencję, a z drugiej na solidarność międzyludzką i miłość bliźniego, uda się nam bez trudu uzasadnić wszystko, co tylko się komu zamarzy. Można to zresztą zaobserwować w dyskusjach naszych dzisiejszych polityków. Nie byłiby oni jednak zadowoleni z powyższego stwierdzenia. Niezadowoleni byli też politycy współczesnych Sokratesowi Aten, więc oskarżyli go o bezbożność i skazali na śmierć, kaząc mu wypić kielich cykuty, co też uczynił.

Przykład II. Dla określenia swojego położenia na kuli ziemskiej żeglarz musi stwierdzić, na jakiej szerokości i długości geograficznej się znajduje. Szerokość geograficzna w pogodną noc daje się łatwo określić – jest to bowiem pojęcie przyrodnicze: wystarczy stwierdzić, jaki kąt z poziomem tworzy kierunek ku Gwieździe Polarnej. Ten kąt to właśnie szerokość geograficzna na naszej półkuli. Nie istnieje natomiast doświadczenie przyrodnicze pozwalające określić długość geograficzną. Już sam południk zerowy jest ustalany umownie – do pierwszej wojny światowej były zresztą trzy takie umowy: brytyjska – z południkiem zerowym przechodzącym przez londyńskie przedmieście Greenwich, francuska – z zerowym południkiem przez Paryż (mam nawet globus z tak zaznaczonym południkiem zerowym) i hiszpańska – przez Kadyks. Dziś powszechnie przyjmuje się tę pierwszą umowę.



Jaki południk uznano za zerowy na tej mapie ? (★¹ – patrz *Jeszcze odrobina komentarzy*, str. 16)

Do określenia długości geograficznej (nawet przez GPS!) potrzebna jest znajomość różnicy czasu astronomicznego (np. kiedy jest południe) między nami a południkiem zerowym – ta różnica czasu w godzinach pomnożona przez 15 daje długość geograficzną w stopniach (wschodnią, jeśli nasz zegar jest szybszy od londyńskiego, i zachodnią, gdy jest wolniejszy). W czasach, gdy nie było dostatecznie dokładnych zegarów, kłopoty z ustalaniem długości geograficznej były bardzo poważne (posługiwano się tzw. tablicami astronomicznych efemeryd). Stąd w XVII wieku admiralicje Anglii i Holandii, posiadających największe floty, ufundowały wielką nagrodę za skonstruowanie morskiego chronometru, co nie udało się mimo starań ani Galileuszowi, ani Huygensowi. Dopiero John Harrison (1705 r.) taki chronometr skonstruował i ten przy niewielkich zmianach dotrwał do pojawienia się radia. Inna rzecz, że Harrison musiał przez okrągłe 30 lat procesować się ze skąpyimi admirałami, zanim nagrodę mu wypłacono.

Przykład III. Jeśli chcemy opisać rozwartość jakiegoś kąta, wystarczy podać, jaką część (właściwą lub nie) kąta pełnego on stanowi. Rozwartość kąta pełnego możemy opisać na różne sposoby: a to, że jest to 360° , a to, że 2π radianów, a to, że 400 gradusów (jak chciała Rewolucja Francuska), a to, że 6 000 tysięcznych, jak chcą artylerzyści i to wyznaczy rozwartość naszego kąta.

Tak czy owak, możemy poinformować o rozwartości kąta, nie odwołując się do żadnego materialnego wzorca. Ten fakt określamy, mówiąc, że kąt ma miarę naturalną. Natomiast odcinek nie ma miary naturalnej i, aby podać jego długość, obok podania jakiejś liczby musimy odwołać się do jakiegoś materialnego wzorca. Za czasów mojej młodości była to szyna z dwoma nacięciami przechowywana w Sévres pod Paryżem. Dziś używa się do tego prędkości światła (cytuję: 1 m *to odległość, jaką przebywa płaska fala elektromagnetyczna w ciągu* $1/299792458$ s – prościej, prawda?).

Orientujemy Alicję

Wróćmy jednak do Alicji. Spróbujmy – pamiętając, że mamy różne możliwości – przyjrzeć się pochodzeniu różnych charakterystycznych kierunków jej ciała (wstydlivi mogą, oczywiście, przyglądać się sobie).

Góra i dół są pojęciami przyrodniczymi. Zarówno fizyka (ciężenie), jak wynikająca stąd anatomia (nogi u dołu, głowa u góry) wyraźnie różnicę góry i dołu wyznaczają.

Przód i tył – też są przyrodnicze, bo każdy z nas coś innego ma z przodu (np. nos) niż z tyłu.

Natomiast lewa i prawa to tylko umowa, konwencja. Do dwóch strzałek prostopadłych dobieramy trzecią – można to zrobić na dwa równoważne sposoby. Dowolność widać w trudnościach, jakie mają dzieci (często do późnej starości) z nauczeniem się, gdzie jest prawo, a gdzie lewo – chodzi o czystą umowę: tego nie można zrozumieć, tego trzeba się nauczyć na pamięć. A żarty w rodzaju: *lewa ręka to ta, gdzie kciuk jest z prawej strony*, tylko ową dowolność podkreślają.

Do tej umowy wrócimy za chwilę, ale teraz zakończmy sprawę z lustrem. – Lustro góry i dołu zmienić nie może. Strzałka do góry po odbiciu jest strzałką do góry, a więc nie zmienia się.

– Przód i tył lustro, oczywiście, zamienia: nie zwróciliśmy na to uwagi, ale przecież stoimy ze swoim odbiciem nos w nos – jeśli, na przykład, mieliśmy nos wskazujący (jak kompas) północ, to w lustrze nos wskazuje południe. Zatem strzałka skierowana do lustra zmienia się na strzałkę skierowaną od lustra.

– Prawej i lewej lustro nie zmienia: przecież ręka z zegarkiem jest z tej samej strony, co była, **to my zmieniamy jej nazwę!**

I tu pojawia się matematyczne pojęcie orientacji. Jest to kolejność wzajemnie prostopadłych strzałek. Wybór tej kolejności to *orientacja* przestrzeni. I tu zdumiewający fakt: zarówno w jedno-, jak w dwu-, trój- i więcejwymiarowej przestrzeni jest tyle samo orientacji – dwie. Czyli w dowolnie wymiarowej przestrzeni każdy zestaw maksymalnej liczby wzajemnie prostopadłych strzałek z ustaloną kolejnością daje się przenieść tak, że się nałoży na jeden z ustalonych dwu takich zestawów. Utarło się, że o jednej orientacji mówimy dodatnia, a o drugiej – ujemna. W przestrzeni trójwymiarowej funkcjonują też techniczne nazwy: prawoskrętna i lewoskrętna.

Matematycznie obie orientacje są równoważne. Ale w szkole – gdzie wszystko musi być jednoznacznie zadekretowane – ustalono, by nazywać je niejako geograficznie: dodatnia (prawoskrętna) orientacja to wschód-północ-góra, na płaszczyźnie wschód-północ i na prostej wschód. Ale nic by się nie zmieniło, gdybyśmy się umówili odwrotnie.

Używając jednak tej terminologii w przypadku Alicji, stwierdzamy, że dodatnia jest np. orientacja nogi-nos-prawa ręka (jak też nos-prawa ręka-nogi, nos-nogi-lewa ręka itd.), a orientacja np. nos-nogi-prawa ręka jest ujemna.

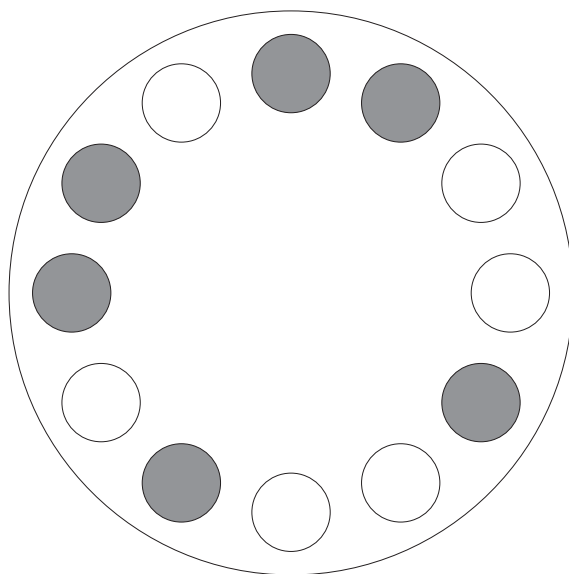
Zorientowawszy się już, jak zorientować Alicję dodatnio, a jak ujemnie, możemy zadać sobie pytanie, czy wszystko da się zorientować. A dokładniej, czy dany obiekt ma w sobie zakodowaną orientację, czy dopiero trzeba ją do niego sztucznie dokleić.



Kuli nie można postawić do góry nogami nie tylko dlatego, że nie ma ona nóg

Obrazek poucza nas, że kula nie niesie na sobie żadnej orientacji, w lustrze wygląda tak samo jak przed nim. A próby odpowiedzenia na pytanie, czy kosmonauci są do góry nogami, czy też nie, mają sens dopiero, gdy jakoś tę kulę orientacją obdarzymy, np. zamieniając ją na globus i upierając się, że to my – mieszkańcy półkuli północnej jesteśmy górą, a mieszkańcy Australii chodzą do góry nogami.

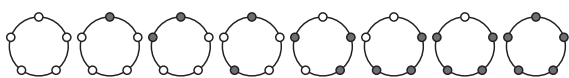
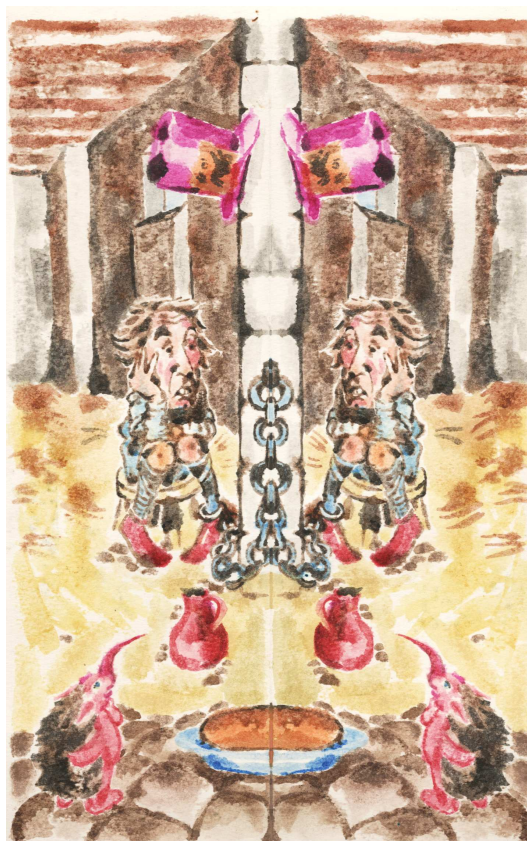
Ale odpowiedź na pytanie, czy dana figura niesie na sobie orientację, czy też nie, nie zawsze jest taka łatwa. Na przykład, jak stwierdzić, czy można odróżnić narysowany obok „zegar” od jego lustrzanego odbicia? Jest to obrazek dwuwymiarowy, więc ma tylko górę i dół oraz lewą i prawą stronę. Gdyby się więc udało obrócić go w ten sposób, by jego prawa strona była taka sama, jak lewa, to znaczyłoby, że nie da się go odróżnić od jego odbicia w lustrze. Ale to można przecież powiedzieć tak: obrazek jest nie do odróżnienia od swojego odbicia w lustrze, gdy można tak złożyć papier, na którym jest narysowany, by rysunek dokładnie nałożył się sam na siebie.



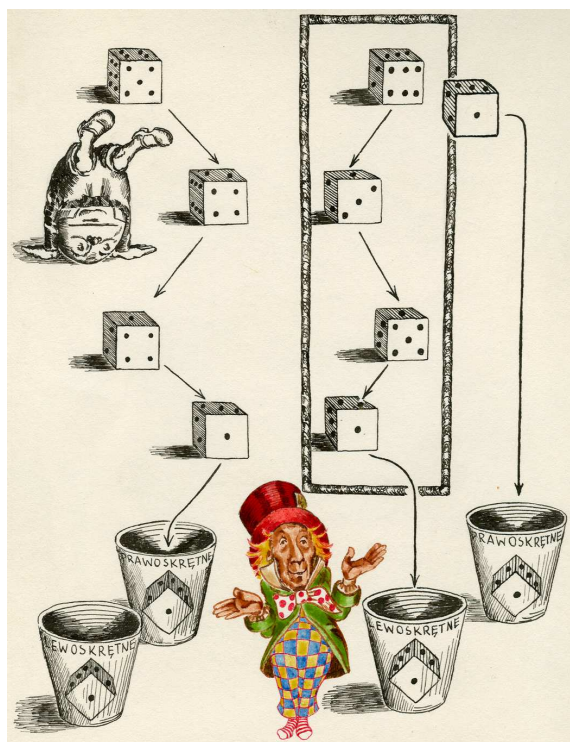
W dawnych czasach (a gdzieś tam pewnie i dziś) zabawiano się w „kleksografię”. Malowano brudzącymi farbami obrazek, po czym papier składano na pół i wtedy powstawał obrazek niedający się odróżnić od swego odbicia w lustrze.

Ale wróćmy do naszego zegara. Nietrudno zauważyć (lub wypróbować wszystkie możliwości – jest ich nie więcej niż 12), że takie złożenie papieru z narysowanym naszym zegarem, w którym białe kółka trafiają na białe, a czarne na czarne, nie udaje się. Nasz zegar ma zatem wpisaną w siebie orientację.

A oto pytanie dla ciekawych Czytelników: ile co najmniej „godzin” musi mieć zegar, by można było te godziny tak pomalować dwoma kolorami, by dawał się odróżnić od swojego odbicia w lustrze, by miał na sobie orientację?



Jak można zauważyć, pięć „godzin” nie wystarcza. Widzieliśmy też, że można tak pomalować godziny na dwunastogodzinnym zegarze, by dał się odróżnić od swego odbicia. Ale jak jest dla zegara sześć-, siedmio-, ... jedenastogodzinnego? ($\star^2$).



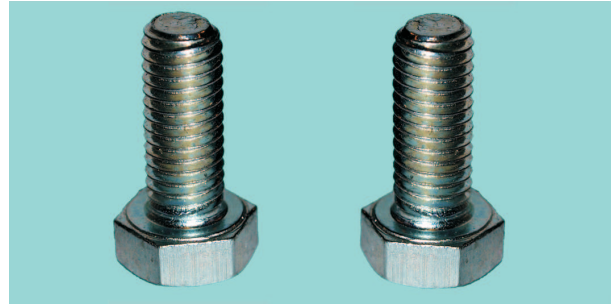
A czy kostka do gry niesie na sobie orientację? Kapelusznik twierdzi, że istnieją różnie zorientowane kostki. Spróbujmy uzasadnić, że ma rację. Oczywiście będzie nas interesowało tylko to, ile jest oczek na tej czy innej ścianie kostki, a nie to, jak są na niej rozmieszczone.

Każdą kostkę możemy położyć na stole tak, by u góry była szóstka. Jasne. U dołu zatem będzie jedynka (suma oczek na przeciwległych ściankach kostki jest zawsze równa 7 – to każdy wie). A teraz każdą z leżących na stole kostek obróćmy – nie podnosząc ze stołu – tak, aby z przodu była piątka (a więc z tyłu będą wszędzie dwójki). I teraz wiemy, że na bokach kostek są czwórki i trójki – ale możliwości są dwie: albo czwórka z lewej (a trójka z prawej), albo odwrotnie. Czyli rzeczywiście są dokładnie dwie, odmiennie zorientowane, kostki do gry. A czy wszystkie kostki, jakie macie w domu, są zorientowane tak samo?

To zadanie prowadzi na kolejnych pytań. Malujemy dwoma kolorami wierzchołki sześciianu. Czy będą wśród tak pomalowanych sześcianów takie, które niosą orientację, a jeśli tak, to ile? ($\star^3$).

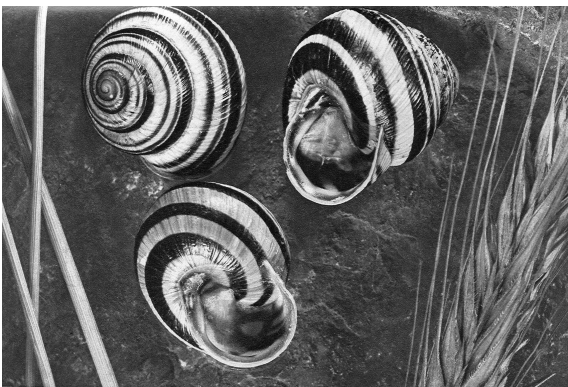
A co na to przyroda?

W technice pojęcie orientacji ma ogromne znaczenie, choćby śruby bywają prawo i lewo skrętne, podobnie jak odmienną orientację mają nasze buty (przecież lewy jest lustrzanym odbiciem prawego). Ale o ile buty zazwyczaj sprawiedliwie – po połowie – dzielą się na prawe i lewe, to ze śrubami już tak nie jest: prawoskrętnych jest o wiele, wiele więcej niż lewoskrętnych, choć nie widać powodu, by tak być miało.



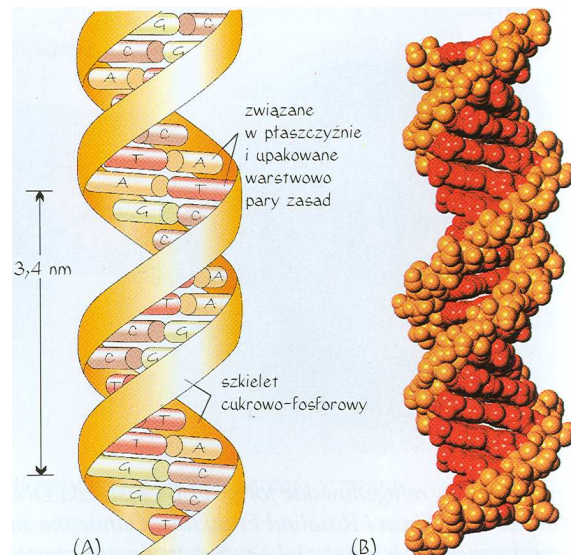
A jak do sprawy „podchodzi” przyroda? Czy jest wobec tych równoprawnych możliwości sprawiedliwa. Odpowiedź brzmi – nie. Sprawa ma jednak różne oblicza.

Zacznijmy od siebie – było takie hasło wyborcze: *serce masz po lewej stronie, a po prawej masz wątrobę*. I przeważnie istotnie tak jest. Skąd biorą się takie nieregularności?



Nierównoprawność w wyborze orientacji przez przyrodę dostrzeżono dawno. Najbardziej oczywistym przykładem są muszle ślimaków – rzeczywiście przytłaczająca większość z nich odpowiada orientacji prawoskrętnej. Od pół wieku objaśnia się to tak: jakakolwiek nierównomierność wzrostu muszli – z jednej strony troszeczkę szybciej niż z drugiej – powoduje jej kształt spiralny; proces ten pogłębił się podczas upływu pokoleń, bo odchylenia się genetycznie przekazywały, a w wyniku ewolucyjnej konkurencji jedna z orientacji stała się dominująca.

Odkrycie helisy DNA (też praktycznie zawsze o tej samej orientacji) nie zmieniło poglądu na tę sprawę – po prostu jedna z orientacji wygasa.



Asymetria jest też w chemii – tam, zamiast o orientacji, mówi się o *chiralności*. Złożone związki organiczne mają bardzo skomplikowaną strukturę przestrzenną i mogą istnieć w wersjach o odmiennej chiralności (czyli orientacji). Okazuje się, że ma to wielkie znaczenie, gdy zostają wchłonięte przez żywy organizm – pożywne substancje w wersji o odmiennej chiralności niejednokrotnie stają się truciznami.

Stąd konieczność kontrolowania chiralności przy produkowaniu substancji odżywczych czy też zwłaszcza leków. Oczywiście, nie zawsze substancja odmienna chiralnie od milej nam musi być dla nas niemiła: przykładem są zapachy cytrynowy i pomarańczowy, które są swymi lustrzanymi odbiciami.

Znaczenie chiralności zostało podkreślone przyznaniem w 2001 roku Nagrody Nobla właśnie za *chirally catalysed synthesis* (chiralność i po angielsku jest chiralnością – i podobnie się czyta – bo to słowo pochodzi z greki, a oznacza rękę – patrz żart o kciuku). Otrzymali ją Wiliam S. Knowles, Ryoji Noyori i K. Barry Sharpless.

Sięgając do zjawisk jeszcze bardziej podstawowych, czyli do fizyki, też stwierdzamy, że jedna z orientacji jest wyróżniona. W 1820 roku Hans Christian Oersted zauważył, że gdy prąd elektryczny płynie w przewodzie umieszczonym nad igłą magnetyczną, to ona wychyla się i to zawsze w tę samą stronę (oczywiście zależną od kierunku przepływu prądu). Wykonajcie sami takie doświadczenie – nawet przy słabej baterii-paluszku efekt jest bardzo dobrze widoczny ($\star^4$). Doświadczenie to stało się początkiem badań prowadzących do skonstruowania silnika elektrycznego – działa on wykorzystując (również wyróżniającą jedną orientację) siłę Ampère’a. Jeśli prąd płynie wzdłuż wyciągniętej lewej ręki, a siły magnetyczne przebijają dłoń od dołu, to siła Ampère’a działa na przewodnik w kierunku kciuka. Jakkolwiek by nie nazwać orientacji związanej z tym zjawiskiem, jest ona we wszystkich doświadczeniach taka sama. Taka asymetria już nie jest wytworem żadnej ewolucji, co można było jakoś sugerować nawet przy chemicznych związkach organicznych. Próbowano, jako wyjaśnienie tego, że z określonymi zjawiskami związana jest określona orientacja, tworzyć hipotetyczną teorię twierdzącą, że w antymaterii z analogicznymi zjawiskami związana byłaby orientacja przeciwna.

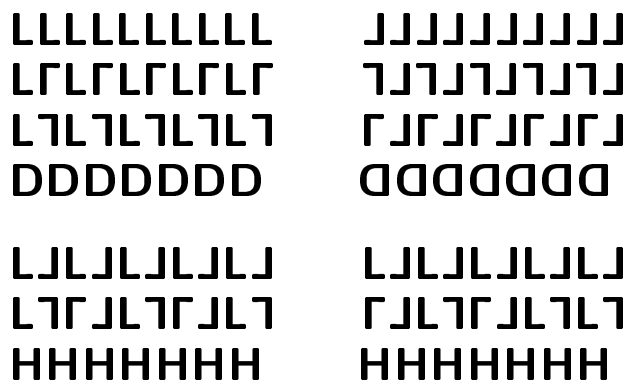
Pomysły te jednak nie mają dziś żadnego znaczenia, gdyż się okazało, że na poziomie zjawisk kwantowych asymetria orientacji też występuje, choć – zgodnie z twierdzeniem von Neumana (zwanego twierdzeniem o parametrach ukrytych) – zjawiska kwantowe nie są wynikiem żadnego procesu losowego czy statystycznego wśród obiektów jeszcze bardziej elementarnych.

Rytmy – szlaczek

O zadziwiająco nieregularnym przeplataniu się zjawisk i sytuacji, w których jakaś orientacja jest wyróżniona, i tych, które żadnej orientacji nie wyróżniają, można przekonać się obserwując dyscyplinę znajdującą się na styku matematyki i geologii, jaką jest krystalografia.

Krystalografia (jako obiekt, a nie jako zajmująca się nim dyscyplina) to rytmiczne wypełnienie przestrzeni. Oczywiście, można zastanawiać się nad krystalografią przestrzeni o różnych wymiarach.

Dla wymiaru 1 chodzić będzie o rytmiczne ornamenty wstęgowe. Okazuje się, że tutaj pełny komplet możliwych rytmów odkryliśmy bardzo dawno temu. Niezwykle ważny moment w dziejach ludzkości to *przełom neolityczny*. Jest to moment, w którym praludzkie stado zamienia się w ludzkie plemię, kiedy powstaje mowa, kiedy zaczyna się ceramika. W tych też czasach rozwijające się zdobnictwo знаło już wszystkie siedem możliwych rytmów wstęgowego ornamentu.



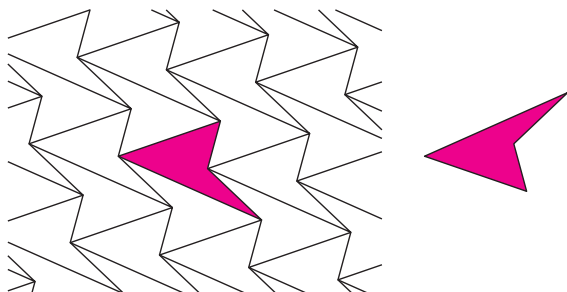
Gdy posłużymy się literą **R**, szlaczków-rytmów będzie tylko pięć – trzy z wyróżnioną orientacją i dwa bez (tu już nie rysowałem lustrzanej kopii) – dłaczego tylko tyle? A ile będzie szlaczków, gdy użyjemy litery **A**, a ile gdy **C** (★⁵)?

Są one pokazane obok. Rytmu te zostały podzielone na dwie grupy, które różnią się, jeśli chodzi o orientację. Krystalografowie mówią, że górne cztery dopuszczają *enantiomorfizm* – oznacza to, że ich lustrzane odbicie (prawo-lewo – jesteśmy przecież w przestrzeni jednowymiarowej) jest – jak widać – od nich różne. A więc rytm pozostaje ten sam, a szlaczek jest inny, choć z tej samej czcionki wykonany. Dolne trzy rytmy po odbiciu lustrzanym pozostają niezmienione. Ze względu na możliwość podwojenia górnych rytymów czasami mówi się, że rytymów jednowymiarowych jest 11.



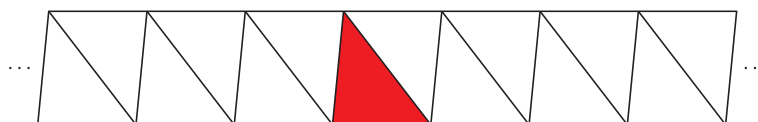
Rytmy – posadzka

Odkrycie wszystkich rytymów dwuwymiarowych należy przypisać Arabom. Niezależnie od rozbieżności w poglądach skrupulatnych badaczy większość jest zdania, że wszystkie 17 możliwych rytymów (płaskich) mozaik można znaleźć w zabytkach wzniesionej przez Maurów, dzisiaj hiszpańskiej, Alhambry. To, że faktycznie możliwych rytymów jest 17, udowodnił matematycznie w 1890 roku bynajmniej nie matematyk, lecz geolog, Rosjanin, Jewgraf S. Fiodorow. Z tych 17 rytymów pięć dopuszcza enantiomorfizm.

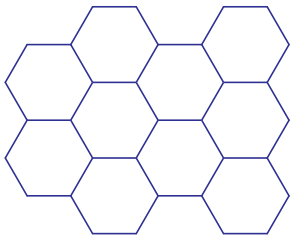


Na czym to polega, można zobaczyć na przykładzie wyparkietowania płaszczyzny nieregularnymi czworokątami. Na rysunku mamy parkiet powstały z kopii wyróżnionego czworokąta. Obok jest lustrzana kopia tego czworokąta – każdy zauważy, że nie może się ona wkomponować w narysowany parkiet, choć parkiet powstały z jej kopii byłby w istocie (czyli enantiomorficznie) taki sam, jak ten narysowany. Można więc i tutaj powiedzieć, że rytymów na płaszczyźnie jest 22.

Ten czworokąt wygląda dość niepodobnie do czworokątów, o jakich mówi się w szkole. Czy został tak specjalnie dobrany, by nadawał się na klepkę posadzki? No i mamy problem. Zaczniemy od tego, co każdy wie: kopiami dowolnego trójkąta można wyparkietować płaszczyznę – np. ustawiamy trójkąt jednym bokiem poziomo, a potem postępujemy z nim wedle rytymu z drugiego wiersza wyliczanki szlaczków jednowymiarowych.

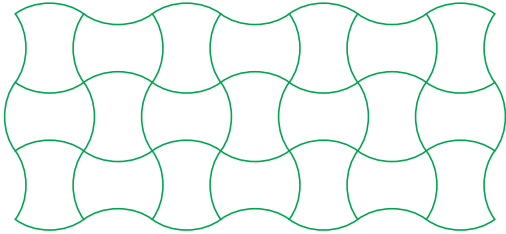


Otrzymamy wypełniony pasek dowolnej długości. Układając pasek przy pasku, otrzymujemy posadzkę na całej płaszczyźnie.



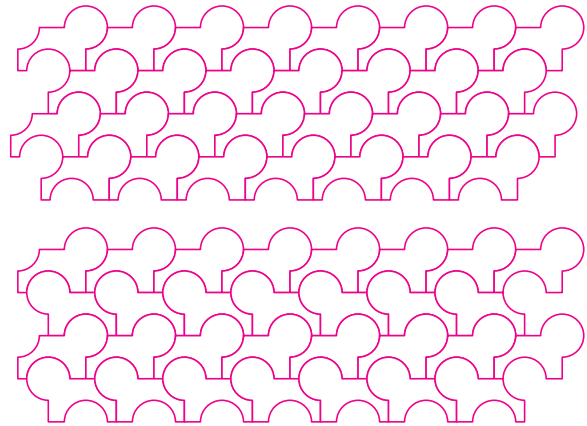
Okazuje się, że podobnie jest dla czworokątów – każdy nadaje się na zrobienie z jego kopii posadzki. Ale jak to uzasadnić? Obserwacja przykładu, od którego posadzkowanie zaczęliśmy, powinna pomóc w znalezieniu stosownego sposobu (a nawet ścisłego algorytmu) ($\star^6$).

Z kolei od pszczół wiemy, że można zrobić posadzkę z sześciokątów foremnych – kto nie wierzy rysunkowi, niech zajrzy do ula. Ale czy foremne to jedyne sześciokąty nadające się na klepkę posadzkową? A co z pięciokątami ($\star^7$)?



A jeśli ktoś nie lubi wielokątów, może zadać pytanie, czy istnieją inne, niewielokątne klepki posadzkowe (przypominam – cały parkiet ma być wykonany z jednakowych klepek!). Oczywiście tak, bo przykład widać obok. Ale on jest bardzo regularny (na przykład jest identyczny ze swoim odbiciem lustrzanym).

Podobno Francuzi mówią *revenons à nos moutons*, co znaczy dosłownie *wracajmy do naszych baranów*, a w przenośni: powróćmy do tematu, czyli orientacji. Przykład parkietowania czworokątami dawał posadzkę niosącą na sobie orientację. Baranki obok (bo chyba można tak nazwać narysowane obok klepki) pokazują, że mogą utworzyć posadzkę różną od swego lustrzanego odbicia (to te na górze), albo też z nim tożsamą (to te na dole). Każdy pewnie też spostrzeże, że mogą też wyparkietować płaszczyznę w sposób nierytmiczny – jak?



A gdyby ktoś chciał zaprojektować całkiem „osobistą” klepkę, to czy ma szansę? Proszę spróbować dizajneringu ($\star^8$). Może dać ciekawe rezultaty.

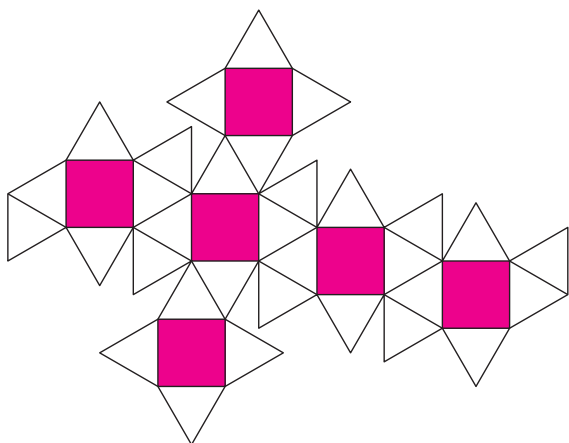
Rytmy – kryształ

Napisałem, że w przypadku jedno- i dwuwymiarowym *można by* doliczyć do możliwych rytmów ich enantiomorficzne sobowtóry, bo z reguły tak się nie robi. Natomiast takie doliczanie w przypadku krytalografii trójwymiarowej jest powszechnie stosowane. Wszystkie rodzaje rytmicznego wypełnienia przestrzeni zostały wyliczone we wspomnianej już pracy Fiodorowa, co niezależnie zrobili też Niemiec, Artur M. Schönflies (w 1891 r.) i Anglik, William Barlow (w 1894 r.). Ich liczba to 219, a z wliczeniem wersji enantiomorficznych – 230.

Gdy chodzi o krytalografię, to rozważa się jeszcze klasyfikację „klocków”, które pozwalają zrealizować wypełnienia. Interesującą rzeczą jest to, że choć matematyka dopuszcza (w przypadku trójwymiarowym) 32 typy kryształów, to geologom i chemikom do tej pory udało się znaleźć tylko kryształy realizujące 31 z tych typów – brakuje typu oznaczanego C_6C_3 , co oznacza kryształ, który przy obrocie o 60° ma zamienione dół i górę (a więc po obrocie o następne 60° powracają one na poprzednie miejsca).

Nie ma natomiast problemu ze znalezieniem enantiomorficznych wersji tego samego minerału: znajdując kryształy kwarcu tzw. typu α - SiO_2 , będziemy natrafiali z bliską $1/2$ częstością na oba enantiomorficzne typy.

Gdyby ktoś natomiast chciał sam wyprodukować sobie coś enantiomorficznego, to może np. skleić jeden z wielościanów archimedesowych, a więc takich, których ściany są wielokątami foremnymi, ale nie jednakowymi, natomiast w każdym narożu zbiega się taki sam cykl wielościanów. Konkretnie chodzi o ten, w którego każdym narożu zbiegają się cztery trójkąty równoboczne i jeden kwadrat. Ma on łącznie 32 ściany trójkątne i 6 kwadratowych.

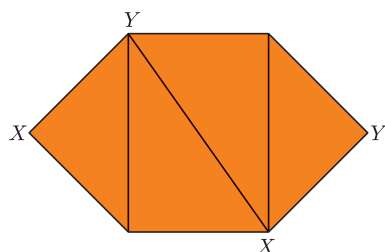
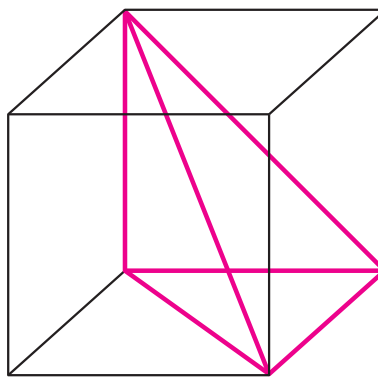


Oto jego siatka. Kilkakrotne sklejenie tej siatki da najprawdopodobniej ten sam efekt co kolejne znaleziska kryształu kwarcu typu α . Otrzymane z tej samej siatki wielościany mogą być enantiomorficzne, czyli jeden może być lustrzanym odbiciem drugiego, choć jednakowe nie będą. Efekt ten powstanie, gdy za jednym razem wielokąt siatki zegnijemy ku sobie, a za drugim razem od siebie. Zauważmy, że np. sześciąt nie ma enantiomorficznej pary i niezależnie od tego, w którą stronę będziemy zaginali jego siatkę, powstanie identyczna bryła.

Zliczenie tych obiektów, które mają enantiomorficzne wersje, wskazuje, że zarówno w krytalografii, jak wśród wielościanów, stanowią one mniejszość – np. wśród wielościanów foremnych (jednakowe foremne ściany i jednakowe naroża) nie ma ich wcale.

Ale poszukiwanie enantiomorfizmów wśród regularnych wielościanów kazało nam zapomnieć, że zajmujemy się przestrzennymi rytmemi, czyli rytmicznymi wypełnieniami przestrzeni, a przedstawiony trzydziestościan nie nadaje się do pełnego jej wypełnienia. Podobnie, spośród wielościanów foremnych tylko sześciątami można przestrzeń wypełnić bez luk.

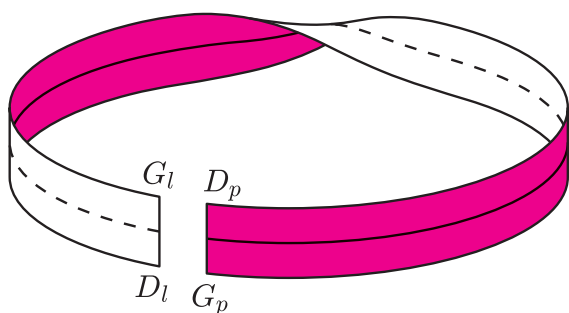
Prostym przykładem wielościanu, którym można wypełnić przestrzeń w sposób rytmiczny zarówno tak, by została wyróżniona jedna z orientacji, jak i tak, by żadna wyróżniona nie została, jest najprostszy z czworościanów Hilla, na rysunku (dla lepszego zaprezentowania jego wyglądu) przedstawiony jako fragment sześciianu.



Jego siatka jest bardzo prosta: dwa trójkąty o bokach $1, 1, \sqrt{2}$ i dwa o bokach $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ – na rysunku dorysowałem jeszcze litery, aby było wiadomo, co z czym skleić. Takich czworościanów trzeba sobie przygotować wiele – jedne otrzymamy, skleając kolorem do wewnątrz, inne, ich enantiomorficzne (czyli lustrzane) odpowiedniki, otrzymamy, sklejąc kolorem na zewnątrz. Każdego rodzaju należy mieć co najmniej 9 sztuk. A potem warto spróbować, jak wypełnia się przestrzeń czworościanami jednego tylko rodzaju – to będzie wypełnienie różniące się od swego lustrzanego odbicia. Używając obu rodzajów, można rytmicznie wypełnić przestrzeń tak, by to wypełnienie nie różniło się od swego odbicia – proszę spróbować; uprzedzam, że zadanie jest trudne ($\star^6$).

O niemożności słów kilka

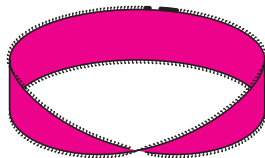
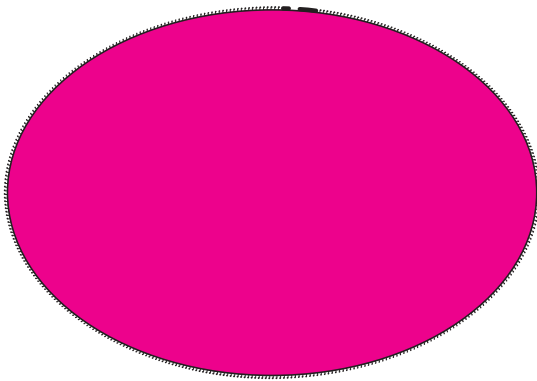
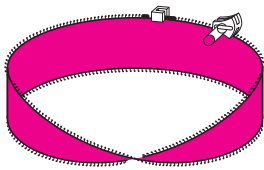
Jak było widać, nasze początkowe stwierdzenie, że obie orientacje są w matematyce równoprawne, okazuje się coraz bardziej złożone. Równoprawność polega na tym, że większości obiektów można nadać obie możliwe orientacje, ale są też takie, które mają orientację wpisaną w swoją strukturę i równoprawność manifestuje się przez istnienie ich odpowiedników z wpisaną orientacją odwrotną.



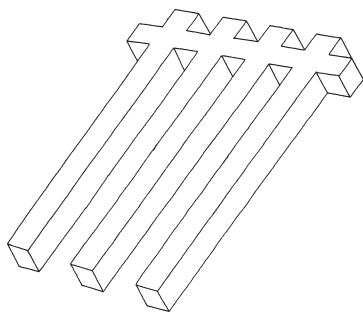
Istotnie nowe spojrzenie na tą sprawę przyniosły prace Ferdinanda Möbiusa dotyczące geometrii rzutowej. Okazało się mianowicie, że są obiekty, którym żadnej orientacji nadać nie można. Pierwszy odkryty taki obiekt nazywamy *wstęgą Möbiusa*. Powstaje on z prostokątnego paska papieru, gdy lewy górny róg G_l skleimy z prawym dolnym rogiem D_p i równocześnie lewy dolny D_l z prawym górnym G_p . O tym, że powstała w ten sposób wstęga jest nieorientowalna, przekonujemy się łatwo: zaczniemy np. od G_l i mając sklejenie po lewej stronie, posuwamy palcem wzdłuż brzegu, aż ponownie trafimy na sklejenie (czyli w G_p) – będzie ono teraz po stronie prawej: zamieniliśmy lewo na prawo bez pomocy lustra. Inaczej mówiąc: wstęga Möbiusa znajduje się zarówno po lewej, jak po prawej stronie swojego (!) brzegu – jest więc nieorientowalna.

Ponieważ orientacja jest nieco podobna do bieguna wschodniego i zachodniego – mianowicie mówi się o niej niechętnie – wstęga Möbiusa reklamowana jest nie jako nieorientowalna, lecz jako jednostronna. Jest to niby prawda: gdybyśmy mieli pomalować wstęgę Möbiusa z całej jednej strony, to okazałoby się, że pomalowane są obie strony papieru, z którego ją zrobiliśmy.

Dlaczego wobec tego *niby*? Otóż dlatego, że wszelkie powierzchnie w matematyce nie mają dwóch stron. Czy gdy nauczycielka mówi w klasie: *weźcie punkt **na** płaszczyźnie*, to pilni uczniowie dociekają *co będzie, gdy weźmiemy punkt **pod** płaszczyzną*? – oczywiście, nie. Strony powierzchni pojawiają się dopiero, gdy bierzemy pod uwagę jej orientowalne otoczenie: przestrzeń jest orientowalna, dlatego możemy mówić o zewnątrz i wewnątrz powierzchni kuli, czy też o półprzestrzeni nad, czy też pod płaszczyzną. Papier, z którego wykonana jest wstęga Möbiusa, jest cienki, ale jednak trójwymiarowy, dlatego wstęga prezentuje nam nie powierzchnię, lecz papier jednostronny.



Spróbujmy teraz zobaczyć, co się stanie, gdy weźmiemy pod uwagę nieorientowalną powierzchnię zamkniętą, tak, jak zamknięta jest sfera. Nietrudno sobie taką wyprodukować. Skoro wstęga Möbiusa ma jeden brzeg, to – gdy zrobimy ją np. z płótna – możemy do niego na całej długości przyszyć jedną z części suwaka z rozpinanej kurtki (to będzie mała wstęga) lub śpiwora (ta już będzie spora). Drugą zaś część przyszyjemy do odpowiedniej wielkości również płóciennego koła (jego obwód musi być dwukrotnie większy od długości paska, z którego zrobiliśmy wstęgę). A potem suwak zapnijmy tak, jak zapinamy kurtkę czy śpiwór. Co się stanie? Okaże się, że nie będziemy potrafili tego zrobić. Suwak się nie zapnie, choć w kurtce czy w śpiworze działał bez zarzutu. I tak doświadczalnie przekonaliśmy się, że zamknięta powierzchnia nieorientowalna nie mieści się w przestrzeni trójwymiarowej. Nie mieści się nie tylko ta, którą próbowaliśmy zrobić z płótna i suwaka (jest to *płaszczyzna rzutowa* – to jej właśnie własności badał Möbius), lecz każda. Możemy zresztą łatwo spróbować zrobić sobie inną nieorientowalną powierzchnię zamkniętą, przyszywając dwie połówki suwaka do dwóch jednakowych wstęg Möbiusa i zapinając ten suwak – też długo będzie szło dobrze, ale potem okaże się, że do końca zapnąć się nie da. Gdyby się udało, mielibyśmy w ręku *butelkę Kleina*. Płaszczyzna rzutowa jest nieorientowalnym odpowiednikiem sfery (czyli powierzchni kuli), a butelka Kleina – torusa (czyli dętki).



Gdy już zaczynamy zajmować się obiektami, których nie da się umieścić w przestrzeni trójwymiarowej, to może warto zauważyć, że można na dwuwymiarowym papierze zmieścić figurę, której nie ma i być nie może. Proszę np. spróbować pomalować górną powierzchnię narysowanej bryły. A gdy się nie uda, warto chwilę pomyśleć, jak rysuje się takie, przyzwyczajające *figury niemożliwe*. Można będzie uznać, że narysowaliśmy dobrze, gdy kogoś uda się nabrać, że taka bryła faktycznie istnieje.

Tylko dla dorosłych: co ze Wszechświatem?

W sposób naturalny nasuwa się pytanie, jak to jest z naszą rzeczywistą przestrzenią, czyli Wszechświatem, np. czy jest on orientowalny, czy też nie. Astronomia dziś nie daje nam odpowiedzi na to pytanie. Ale można wobec tego zadać pytanie, wśród jakich możliwości znajduje się odpowiedź. Przy czym możemy nawet zapytać jedynie o to, jakie możliwości dopuszcza dla przestrzeni trójwymiarowej matematyka – o każdej takiej możliwości w matematyce mówi się *rozmaitość*. A więc, jak wyglądają wszystkie możliwe rozmaitości trójwymiarowe – bo przecież trójwymiarowo postrzegamy przestrzeń, w której żyjemy.

Okazuje się, że i na to pytanie odpowiedzi do niedawna nie umiano podać. Pierwszy istotny krok w kierunku pokonania tego problemu zrobił Amerykanin, William Thurston, na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Zamiast odpowiadać po prostu na pytanie o klasyfikację rozmaitości, zapytał o to, jakie geometrie jednorodne (czyli takie, że w każdym punkcie lokalne własności przestrzeni będą takie same) mogą się realizować na danej rozmaitości. Dla wyobrażenia, o co chodzi, powróćmy do przestrzeni dwuwymiarowych, czyli powierzchni i zauważmy, że na sferze geometria jednorodna jest inna niż na płaszczyźnie – np. pole koła o danym promieniu na sferze jest mniejsze niż pole koła o tym samym promieniu na płaszczyźnie. Ale już na walcu geometria jest lokalnie taka sama jak na płaszczyźnie – jeśli wytniemy niewielki kawałek walca, to będzie można go bez kłopotu położyć na płaszczyźnie, bo przecież każdy z nas niejednokrotnie wykonywał operację odwrotną – zwijał walec z płaskiej kartki papieru.

W przypadku dwuwymiarowym możliwe geometrie jednorodne są trzy: lokalnie taka, jak na sferze (nazywa się ją eliptyczną), lokalnie jak na siodle (nazywa się ją hiperboliczną lub Bolyai-Łobaczewskiego) i lokalnie jak na płaszczyźnie (nazywa się ją paraboliczną lub euklidesową). I na każdej rozmaitości można jakąś z tych geometrii określić.

Nie jest to zresztą sprawiedliwe: rozmaitości, na których można określić geometrię eliptyczną, są dwie (sfera i płaszczyzna rzutowa) – rozmaitości, na których można określić geometrię paraboliczną, jest pięć (płaszczyzna, walec, torus, wstęga Möbiusa i butelka Kleina), a rozmaitości, na których można określić geometrię hiperboliczną, jest cała reszta, czyli nieskończenie wiele.

W przypadku trójwymiarowym już od początku jest inaczej – na większości z nich w ogóle żadnej jednorodnej geometrii nie da się określić. Jeśli się już da, to – jak wykazał Thurston – jest to jedna z ośmiu geometrii (nie będziemy tu ich przywoływać). Za ten wynik otrzymał on w 1983 roku – na Międzynarodowym Kongresie Matematyków, Warszawa 1982 – medal Fieldsa, najwyższe matematyczne odznaczenie. Wyraził też przypuszczenie, zwane potem Hipotezą Geometryzacyjną, że każdą rozmaitość trójwymiarową można porozcinać (dwuwymiarowymi) sferami i torusami na części, z których każda będzie już pozwalała na wprowadzenie w niej lokalnie jednorodnej geometrii. Pytanie o prawdziwość Hipotezy Geometryzacyjnej uchodziło za jedno z najważniejszych i najtrudniejszych w matematyce. Roztrzygnięte zostało pozytywnie w 2005 roku przez Rosjanina, Grigorija Perelmana, który za ten wynik uzyskał medal Fieldsa na Kongresie w Madrycie w 2006 roku. Mamy więc nadzieję, że powoli zaczniemy opanowywać intelektualnie problem rozmaitości trójwymiarowych, czyli możliwych kształtów Wszechświata.

Podana wyżej lista rozmaitości dwuwymiarowych pozwala odpowiedzieć na pytanie o orientowalność możliwych dwuwymiarowych przestrzeni: spośród tych z geometrią eliptyczną jedna jest orientowalna, jedna nie; spośród tych z geometrią paraboliczną trzy są orientowalne, a dwie nie (każdy z Czytelników tego tekstu powinien wiedzieć już, które są jakie); spośród tych z geometrią hiperboliczną jest nieskończenie wiele tak jednych, jak drugich. A nikogo nie zdziwi, gdy napiszę, że pełnej klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych ze względu na ich orientowalność nie ma.

Aby jednak nie zakończyć opowieści bez jakiegoś kategoriycznego stwierdzenia, podajmy informację, jak byłoby z Wszechświatem, gdyby okazał się geometryzowalny bez rozcięć i obowiązywała w nim geometria euklidesowa, czyli ta szkolna – bo to akurat wiadomo. Wówczas byłoby 10 możliwości, że Wszechświat jest orientowalny (w tym 6 byłyby to Wszechświaty ograniczone) i 8 możliwości, że nieorientowalny (w tym cztery ograniczone i cztery – nie).

Oto, do rozważania jakich problemów może doprowadzić proste pytanie,

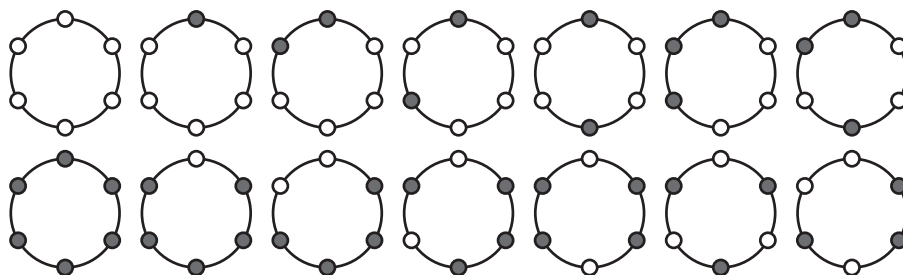
co zobaczyła Alicja po drugiej stronie lustra?

Jeszcze odrobina komentarzy

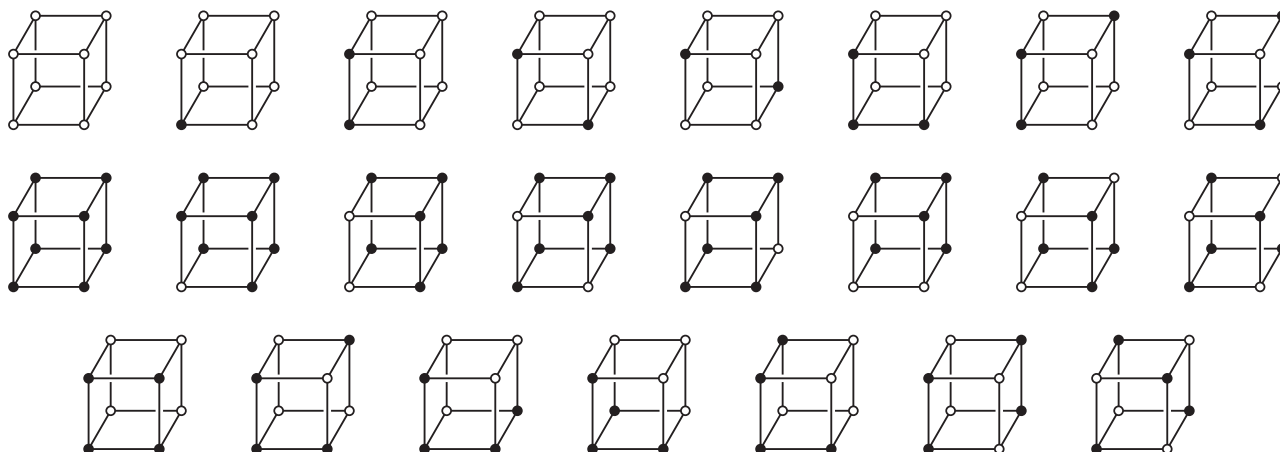
(★¹) Mapa utrudnia odpowiedź na pytanie, bo jest opisana po francusku, przywoływani są członkowie angielskiego Royal Society, a na dodatek została wydrukowana w Holandii. Oczywiście, wobec tego zerowy południk jest poprowadzony przez ... Kadyks.

Bardzo ciekawe jest natomiast to, czego zapewne w reprodukcji nie widać: nie ma na niej długości geograficznej wschodniej i zachodniej – jest jedna tylko długość, liczona na wschód, ale za to do 360°.

(★²) Okazuje się, że już zegar sześciogodzinny może być tak pomalowany, by różnił się od swego odbicia lustrzanego, co można odszukać na poniższym obrazku.



(★³) Oto wszystkie różne pokolorowania wierzchołków sześcianu dwoma kolorami (każde inne pokolorowanie da się przez obrót otrzymać z jednego z nich). Jest ich 23, przy czym tylko dwa noszą na sobie orientację. Proszę odszukać parę różniącą się, ale będącą wzajemnie swoimi odbiciami lustrzanymi.



Dla tych, którzy chcą wiedzieć wszystko, informacja o liczbie różnych pokolorowań wierzchołków sześcianu k kolorami: jest ich

$$\frac{1}{24}(k^8 + 17k^4 + 6k^2),$$

przy czym różnych, ale lustrzanych par jest

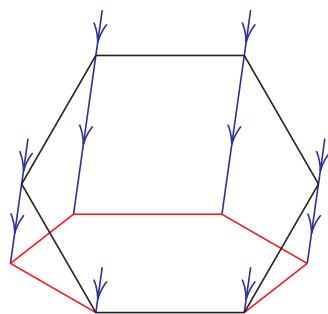
$$\frac{1}{48}(k^8 - 6k^6 + 13k^4 - 8k^2).$$

Proszę sprawdzić, że dla $k = 2$ otrzymujemy 23 i 1. No, a potem można sobie obliczyć wynik dla dowolnie obranej liczby kolorów.

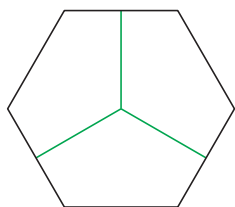
(★⁴) Do przeprowadzenia doświadczenia Oersteda potrzebny jest kompas (można kupić kompasy wycieczkowe w sklepach sportowych i turystycznych), cienki drut miedziany długości około 30 cm i baterijka do latarki. Kompas kładziemy na stole, a na nim środkowy, wyprostowany odcinek drutu (7–8 cm) położony wzdłuż igły (wskazówki) kompasu. Drut z obu stron kompasu zginamy tak, by można było dotknąć jego końcami biegunów baterijki bez poruszania tego fragmentu, który leży nad igłą. Gdy dotkniemy do bieguna + tym końcem drutu, który biegnie od południowego końca igły, a bieguna – drugim końcem drutu, igła kompasu odchyli się tak, jak wskazuje kciuk wyciągniętej przez siebie prawej ręki skierowanej dłonią do dołu.

(★⁵) Warto zauważyć, że liczba możliwych szlaczków wyprodukowanych z danej litery-czcionki (bez kładzenia jej na bok) zależy od tego, na ile sposobów można ją samą położyć na zajmowanym przez nią miejscu. Np. literę **L** można położyć na niej tylko na jeden sposób, literę **D** na dwa sposoby, a literę **H** na cztery sposoby.

(★⁶) Rzeczywiście każdy czworokąt nadaje się na klepkę posadzki. A uzasadnienie jest proste – sąsiednia kostka ma być ułożona tak: kładziemy kostkę na już ułożonej, a następnie obracamy ją o 180° dookoła środka boku, przy którym chcemy ją umieścić. Proszę wyciąć sobie z kartoniku kilka jednakowych czworokątów i sprawdzić, jak to działa.



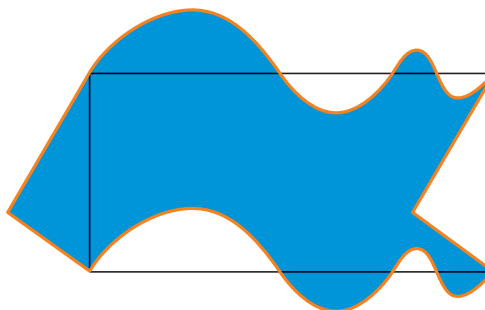
(★⁷) Na przykład na rysunku czerwony sześciokąt o przeciwnych bokach równoległych jest dobry: ułożona z jego pomocą posadzka to przecież będzie cień posadzki z foremnych sześciokątów. Ale właśnie, ... na rysunku pozioma duża przekątna jest akurat „w połowie drogi” między równoległymi do niej bokami – czy można tak oświetlić (czarny) sześciokąt foremny, by tak nie było?



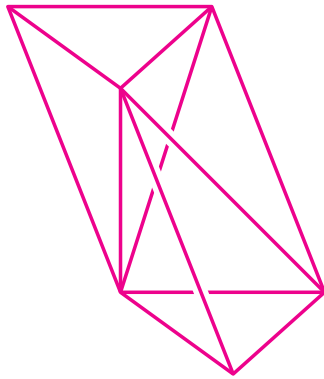
A jednakowe pięciokąty nadające się na klepkę można otrzymać np. dzieląc sześciokąt na trzy, jak na rysunku. Gdy ułożymy rytmiczną posadzkę z tych pięciokątów będzie ona identyczna ze swoim odbiciem lustrzanym. Czy można znaleźć jakieś inne pięciokąty, by ułożona z nich rytmiczna posadzka była inna od swego lustrzanego odbicia?

(★⁸) Nowe klepki posadzki można projektować także tak. Bierzymy znaną klepkę, która nadaje się na posadzkę – np. prostokąt i zmieniamy jej boki tak, aby po zmianie dalej pasowały do sąsiedniej, tak samo zmienionej klepki – można to zrobić choćby tak, jak na rysunku.

Kiedy prostokąt jest kwadratem, wtedy możliwości jest więcej – jedną z nich już pokazaliśmy wcześniej – który to rysunek?



(★⁹) Oto rysunek wskazujący, jak zrobić trójkątną „rurkę” (czyli graniastosłup pochyły) z jednakowych czworościanów Hilla. A takimi rurkami to już każdy wypełni przestrzeń.



Z kolei sześcián został wypełniony już niejednakowymi, różniącymi się orientacją, czworościanami. A sześciány, jak wiadomo, przestrzeń wypełniają.

