PUNKTY SZCZEGÓLNE TRÓJKĄTA

Za punkty szczególne trójkąta uważamy ortocentrum, środek ciężkości, środki okręgów opisanego i wpisanego, a także środki okręgów dopisanych.

Zad.1. Wykaż, że jeśli dwa z punktów szczególnych (oprócz środków okręgów dopisanych) pokrywają się, to trójkąt jest równoboczny. (6 przypadków)

Zad.2. Wykaż, że ortocentrum dzieli każdą wysokość na dwa odcinki, których iloczyn jest stały dla danego trójkąta.

Zad.3. Wykaż, że punkty symetryczne do ortocentrum względem boków trójkąta leżą na okręgu opisanym na trójkącie.

Zad.4. Przez środek E wysokości AH_1 w trójkącie ABC i wierzchołek C poprowadzono prostą przecinającą AB w D. Wiedząc, że $AE=\sqrt{EC \cdot ED}$ wykaż, że E pokrywa się z ortocentrum H.

Zad.5. Znajdź punkt X taki, że $P_{BXC}=P_{AXC}=P_{AXB}$ oraz taki, że $P_{BXM1} = P_{CXM1} = P_{CXM2} = P_{AXM2} = P_{AXM3} = P_{BXM3}$

Zad.6. Wykaż, że w trójkącie ABC prawdziwy jest wzór $R = \frac{ab+bc+ac}{6(d1+d2+d3)}$, gdzie d_i oznacza odległość środka ciężkości M od poszczególnych boków.

Zad.7. Wykaż, że w trójkącie ABC $\measuredangle HAB = \measuredangle OAC$ gdzie H - ortocentrum, O - środek okręgu opisanego.

Zad.8. Wykaż, że jeśli $a = 60^\circ$ to $AH = R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego.

Zad.9. Wykaż, że jeśli jeden z kątów wynosi 60° to $OI = IH$ gdzie I – incentrum.

Zad.10. Wykaż, że jeśli w trójkącie ostrokątnym $a = 60^\circ$ to B, C, O, H, I, I_a leżą na jednym okręgu.

TWIERDZENIE MENELAOSA I CEVY, A PUNKTY SZCZEGÓLNE TRÓJKĄTA

Tw. Menelaosa. Jeżeli prosta nie przechodząca przez żaden wierzchołek trójkąta ABC przecina jego boki AB, BC, CA lub ich przedłużenia odpowiednio w M, N, P to $\frac{AM \cdot BN \cdot CP}{MB \cdot NC \cdot PA} = 1$.

Tw. Cevy. Jeżeli trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta i nie zawierające jego boków przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe, to odcinki wyznaczone przez punkty M, N, P (przecięcia się tych prostych z bokami lub ich przedłużeniami) spełniają warunek to $\frac{AM \cdot BN \cdot CP}{MB \cdot NC \cdot PA} = 1$.