DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

1. Iloczyn 3 liczb pierwszych równa się potrojonej sumie tych liczb. Co to za liczby?

2. Przez w oznaczmy liczbę wierzchołków graniastosłupa, przez k – liczbę jego krawędzi, a przez $ś$ - ścian. Jakie są możliwe wartości liczby $w+k+ś$?

3. Na stole leży 2018 patyczków. Dwie osoby grają w *Patyczaka*: zabierają naprzemian ze stołu 1, 2, 3, ..., 9, 10 lub 11 patyczków. Wygrywa ten, kto weźmie ostatni patyczek. Czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą?

4. Jak konstrukcyjnie podzielić dane koło z zaznaczonym środkiem na 9 części o równych polach?

5. Jaka jest najmniejsza wielokrotność czwórki, suma cyfr której wynosi 2018?

6. Podaj wszystkie liczby naturalne o tej własności, że powiększone o 1 dzielą się przez 2, powiększone o 2 dzielą się przez 3, a powiększone o 3 dzielą się przez 4.

7. Dowiedź, że w dowolnym pięciokącie wypukłym istnieją trzy przekątne, z których można zbudować trójkąt.

8. Spośród 27 kulek tej samej wielkości i barwy jedna jest lżejsza od pozostałych. Udowodnij, że dwukrotne użycie wagi szalkowej może nie wystarczyć do wykrycia fałszywej kuli.

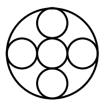
9. Czy prawdziwa jest nierówność $100^{201} > 99^{100} \cdot 101^{101}$?

10. Na przyjęcie sylwestrowe u pani i pana K. przyszły kolejno trzy małżeńskie pary. Niektóre osoby podawały sobie na powitanie ręce. O $23^{\underline{23}}$ wszyscy z wyjątkiem pana K., który zszedł akurat do piwnicy, podali liczbę uścisków dłoni, które wymienili. Każdy podał inną liczbę! Z iloma osobami witał się pan K.?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁÓWA, MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy te liczby przez a, b i c. Mamy: $abc = 3(a+b+c)$, czyli lewa strona dzieli się przez 3. Jest to możliwe (z pierwszości a, b i c), tylko jeśli jedna z tych liczb to 3. Pozostałe dwie liczby oznaczmy przez k i l. Ma zachodzić: $kl = k+l+3$, skąd $k = (l+3)/(l–1) = 1 + 4/(l–1)$. Analogicznie $l = 1 + 4/(k–1)$. Zatem liczby $k–1$ i $l–1$ są dzielnikami czwórki, czyli $k, l \in \{-3, -1, 0, 2, 3, 5\}$. $k, l \geq 2$ i są różne od 3 (w zadaniu mamy 3 liczby pierwsze), więc sprawdzamy $k = 2$ i 5, co daje odpowiednio $l = 5$ i 2. Szukane liczby to zatem 2, 3 i 5. Samo podanie tych liczb jako spełniających zadanie daje 0 punktów.
2. Jeśli przez p oznaczymy liczbę wierzchołków podstawy graniastosłupa (p jest dowolną liczbą naturalną ≥ 3), to $w=2p$, $k=3p$ i $ś=p+2$, zatem $w+k+ś = 6p+2$ może być każdą liczbą tej postaci dla p naturalnych ≥ 3. Za brak uzasadnienia, że każda liczba tej postaci jest dobra, odejmujemy 3 punkty.
3. Żeby mieć pewną wygraną, trzeba przed swoim ostatnim ruchem zastać na stole 1, 2, 3, ... lub 11 patyczków. Aby zmusić przeciwnika do wytworzenia takiej sytuacji, w przedostatnim swoim ruchu trzeba pozostawić na stole 12 patyczków. Analogicznie, żeby dało się to zrobić, musimy przed tym ruchem zastać na stole 13, 14, 15, ... lub 23 patyczki, co z kolei możemy sobie zapewnić przez pozostawienie w poprzednim ruchu na stole 24 patyczków. Powtarzając to rozumowanie (dodając 12), dojdziemy do wniosku, że aby zapewnić sobie wygraną, musimy w pewnym ruchu zostawić na stole 2016 patyczków. Jest to możliwe, jeśli zaczynamy grę. Strategię wygrywającą ma więc gracz rozpoczynający.
4. Oto jedna z możliwych konstrukcji: wykorzystując twierdzenie Talesa, znajdujemy odcinek 3 razy krótszy od promienia danego koła, następnie wykreślamy koncentryczne koło o takim promieniu. Ma ono pole równe dziewiątej części dużego koła. Pozostały pierścień można następnie podzielić na 8 przystających części prowadząc promienie dużego koła co 45° (konstrukcja kąta prostego i dwusiecznej). Wówczas każda z tych części ma również pole równe 1/9 pola koła. Można też w dane koło wpisać 5 przystających kół – patrz rysunek – lub konstruować odpowiednie koncentryczne pierścienie.



5. Liczba ta musi mieć co najmniej 225 cyfr, bo liczby 224-cyfrowe mają sumy cyfr równe najwyżej $224 \cdot 9 = 2016$. Jeśli szukana liczba ma 225 cyfr, to aby suma cyfr się zgadzała, pierwszą cyfrą musi być co najmniej dwójka ($2018=224 \cdot 9+2$), ale wówczas ostatnią cyfrą byłoby 9, więc nie dzieliłaby się przez 4. Dla trójki jako pierwszej cyfry wśród pozostałych cyfr musiałoby być 223 dziewiątek i jedna ósemka, czyli też nie dałoby się uzyskać podzielności przez 4. Jeśli pierwszą cyfrą będzie 4, to pozostałe cyfry to siódemka i 223 dziewiątki lub dwie ósemki i 222 dziewiątki. W pierwszym przypadku żaden układ nie da wielokrotności czwórki, natomiast w drugim jest jedna taka możliwość – przy postawieniu obu ósemek na końcu. Szukaną liczba jest zatem liczba o 225 cyfrach, z których pierwszą jest 4, ostatnimi dwiema ósemki, a pozostałymi dziewiątki.
6. Każda liczba postaci $12k+1$, gdzie $k = 0, 1, 2, ...$ spełnia warunki zadania. Z drugiej strony liczby spełniające warunki zadania muszą być nieparzyste, dawać resztę 1 przy dzieleniu przez 3 i dawać resztę 1 przy dzieleniu przez 4. Są to więc liczby, które po odjęciu jedynki dają liczby podzielne jednocześnie przez 3 i przez 4, czyli liczby postaci $12k+1$ dla $k = 0, 1, 2, ...$ Zatem wszystkie liczby spełniające warunki zadania to wszystkie liczby tej postaci. Jeśli brak uzasadnienia, że wszystkie liczby szukane w zadaniu są postaci $12k+1$, można przyznać najwyżej 4 punkty.
7. Wybierzmy najdłuższą z przekątnych i te dwie, które mają z nią wspólne końce. Da się z nich zbudować trójkąt, ponieważ dwie krótsze z tych przekątnych przecinają się, więc suma ich długości na pewno przekracza długość trzeciej (bo warunek trójkąta spełniają już ich części).
8. Aby ważenie miało sens, na obie szalki musimy położyć tyle samo kulek. Jeśli w pierwszym ważeniu położymy na szalki po 1 kuli, może się okazać, że lżejsza znajduje się pośród pozostałych 25. Jeśli położymy po 2, lżejsza może by pośród pozostałych 23 itd. Jeśli na szalki położymy po 9 kulek, lżejsza może być wśród pozostałych 9. Jeśli na szalki położymy po 10 kul, to może się okazać, że lżejsza jest w którejś z tych dziesiątek, analogicznie przy ważeniu 22, 24, 26 i 28 kulek – lżejsza może być wśród 11, 12, 13 lub 14 kul z jednej szalki. Zawsze wiemy więc tylko, że lżejsza kulka znajduje się pośród co najmniej 9 kul, o których nie wiemy nic więcej. Podobnie po drugim ważeniu na pewno będziemy w stanie umiejscowić lżejszą kulkę jedynie pośród pewnych 3 kulek, czyli może nie udać się nam jej wykryć.

9. Mamy nierówność równoważną: $\left(\frac{100^2}{99\cdot 101}\right)^{100} > \frac{101}{100}$. $\left(\frac{100^2}{99\cdot 101}\right)^{100} = \left(1+\frac{1}{9999}\right)^{100} > 1+\frac{100}{9999}$, ponieważ obliczając setną potęgę przez wymnożenie 100 wyrażeń w nawiasie, otrzymamy sumę, której składniki biorą się z wymnożenia odpowiedniej liczby (w sumie stu) jedynek i ułamków $\frac{1}{9999}$; jeden z tych składników będzie jedynką, 100 będzie równych $\frac{1}{9999}$, a pozostałe dodatnie. Dalej mamy $\frac{100}{9999} > \frac{1}{100}$, co dowodzi prawdziwości podanej nierówności.

10. Każdy mógł wymienić maksymalnie 6 uścisków (nie witał się ze sobą ani swoim współmałżonkiem), więc jeśli siedem osób podało różne liczby, to były to 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Ponieważ osoba, która wymieniła 6 uścisków, przywitała się ze wszystkimi możliwymi osobami, osobą „0", musi być jej współmałżonek. Osoba z piątką nie podała ręki osobie z zerem ani swojemu współmałżonkowi, więc podała rękę wszystkim pozostałym. Zatem jedynką może być tylko jej współmałżonek. Osoba „4" nie podała ręki zeru, jedynce ani swojemu współmałżonkowi (który nie jest zerem ani jedynką), więc podała rękę wszystkim pozostałym, którym wobec tego policzyliśmy już 3 uściski dłoni (z szóstką, piątką i czwórką), więc współmałżonkiem czwórki jest dwójka. Dwie pozostałe małżeństwo to małżeństwo, ona i on wymienili więc po 3 uściski, co oznacza, że jedną z nich jest pan K. (trójka występuje dwa razy).

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

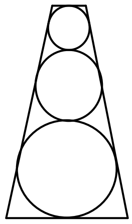
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ II

1. Czy 2017 da się zapisać jako suma co najmniej 3 kolejnych liczb całkowitych nieujemnych?

2. Dwa jednakowe czworokąty wypukłe rozcięto wzdłuż przekątnej: pierwszy z nich wzdłuż jednej, a drugi – wzdłuż drugiej. Czy z otrzymanych części zawsze można złożyć równoległobok?

3. W tym sezonie wiosennym najmodniejsze są bałwany opisane wylansowaną właśnie linią trapezu (patrz rysunek). Znajdź wymiary modnisia o wzroście 1,40m (bez kapelusza), w którym na największą kulę zużyto 64 razy więcej śniegu niż na najmniejszą.



4. Sześcian podzielono na 6 przystających ostrosłupów o podstawach będących ścianami tego sześcianu i wspólnym wierzchołku w środku symetrii sześcianu. Następnie ostrosłupy te naklejono podstawami na ściany sześcianu przystającego do wyjściowego. Ile ścian ma otrzymana bryła?

5. Po torze wyścigowym w kształcie okręgu o promieniu 80 cm poruszają się dwie mrówki – – Andzia i Bob. Jeżeli kierunki ich ruchów są zgodne, to Andzia wyprzedza Boba co minutę. Jeśli są przeciwne, to mrówki mijają się co 24s. Z jaką prędkością porusza się Bob?

6. Liczbę *x* można zapisać w systemie ósemkowym jako ułamek z pięcioma miejscami po przecinku. Co można powiedzieć o zapisie dziesiętnym liczby *x*?

7. Rozwiąż równanie $(\sqrt{3}-1)^x = 2(\sqrt{2}+1)^x - 1$ w liczbach rzeczywistych.

8. Widzowie sztuki „Małpa w kąpieli" w Teatrze Śmiałym zajęli miejsca od 1 do 1001 i każdy z nich miał z szatni numerek też od 1 do 1001. Udowodnij, że jest na sali przynajmniej jeden widz, dla którego suma numeru miejsca, na którym siedzi, i numerka z szatni jest parzysta.

9. Funkcja $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ spełnia dla wszystkich *x* warunek $f(x+1)+f(x-1)=f(x)\sqrt{2}$. Uzasadnij, że *f* jest okresowa.

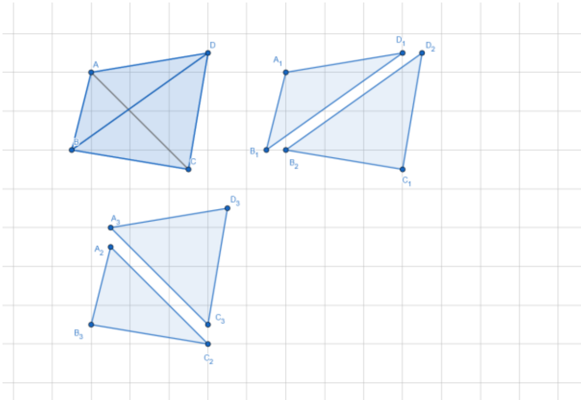
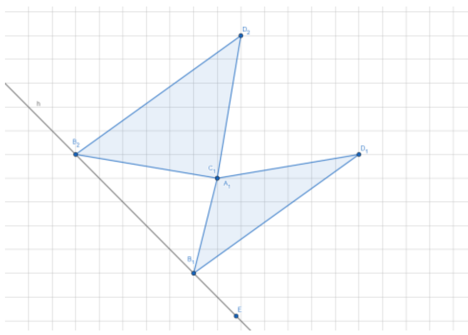
10. Na przedziale (0, π] określono funkcję ciągłą *f*, taką że dla każdego $x\in(0,1)$ $f(x)=f(\pi)$. Udowodnij, że istnieją takie *x*, *y* odległe o 1, że $f(x)=f(y)$.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁÓWA, MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Gdyby tak się dało, mielibyśmy $2017 = k + (k+1) + (k+2) + ... + (k+l)$ dla pewnych całkowitych $k \geq 0$, $l \geq 2$. Taka suma (jako suma $l+1$ wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie k i różnicy 1) wynosi $(2k+l)(l+1)/2$. Mamy więc równanie $(2k+l)(l+1) = 2\cdot 2017$. Jednak 2017 jest liczbą pierwszą (za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 3 punkty, do sprawdzenia wystarczy stwierdzić niepodzielność przez kolejne liczby pierwsze do 43, bo $\sqrt{2017} < 45$), więc po lewej stronie musimy mieć czynniki 2 i 2017 (uwzględniając ograniczenia na k i l). Dwójką może być tylko czynnik $2k+l$ (drugi wynosi co najmniej 3), więc z drugiego czynnika $l=2016$, co przy $2k+l=2$ jest niemożliwe.

2. Trójkąty powstałe z podziału czworokąta $ABCD$ przekątną BD przesuwamy równolegle, aby wierzchołki A i C pokryły się (nie wykonujemy żadnego obrotu). Przeciwległe boki są teraz równe (przekątna BD) i równoległe, a pozostałe ‘dziury’ można zapełnić trójkątami z drugiego podziału (w obu wypadkach zgadzają się boki i kąty między nimi, więc pasujący trójkąt jest jeden). Otrzymujemy czworokąt z dwiema parami równych boków (każda para równa innej przekątnej czworokąta). To musi być równoległobok. Za uzasadnienie tylko dla szczególnych przypadków przyznajemy dajemy do 2-3 pkt.

3. Za wymiary bałwana sensownie jest przyjąć promienie składających się na niego kul. Górna jest podobna do dolnej w skali 1:4 (pierwiastek sześcienny ze stosunku objętości lub mas). Niech A, B i C to punkty styczności kolejnych kół, a O, P i Q – ich środki. Oznaczając OA przez r, mamy $QC=4r$. Wzrost bałwana (równy $2OA+2PB+2QC$) daje $PB=70-5r$. Podobieństwo trójkątów AOH, BPH i CQH daje ($h=OH$) związki $\frac{h+2r+2(70-5r)+4r}{h+r}=4$ oraz $\frac{h+2r+70-5r}{h+r}=\frac{70-5r}{r}$. Z pierwszego równania $h=\frac{140-8r}{3}$, a z drugiego $h=\frac{r^2}{35-3r}$. Przyrównując te wartości, otrzymujemy równanie $3r^2-100r+700=0$, czyli $r\in\left\{10,\frac{70}{3}\right\}$. Dla $r=10$ wymiary bałwana to 10, 20 i 40 cm, a $r=70/3$ jest niemożliwe, bo daje ujemny promień środkowej kuli.

4. W każdym ostrosłupie jego górny wierzchołek, środek podstawy i środek krawędzi podstawy są wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego. Zatem odcinki łączące górne wierzchołki naklejanych ostrosłupów ze środkami krawędzi sześcianu tworzą z odpowiednimi ścianami sześcianu kąt 45°. Dwa takie odcinki poprowadzone do tej samej krawędzi leżą zatem na jednej prostej. Stąd wniosek, że każda krawędź sześcianu należy do jednej ściany otrzymanej bryły. Jest ich więc 12 (i są przystającymi rombami).

5. Szukaną prędkość w cm/s oznaczmy przez v_B, a prędkość Andzi przez v_A. W ciągu minuty Bob pokonuje więc $60v_B$ centymetrów, a Andzia o 160π cm więcej. Stąd równanie: $60v_B + 160\pi = 60v_A$. Analogicznie przy ruchach w przeciwnych kierunkach $160\pi = 24(v_A + v_B)$. Mamy więc układ $\begin{cases}3v_A-3v_B=4\pi\\3v_A+3v_B=10\pi\end{cases}$ $\begin{cases}3v_A-3v_B=8\pi\\3v_A+3v_B=20\pi\end{cases}$, skąd po odjęciu pierwszego równania stronami od drugiego i podzieleniu obu stron przez 6 otrzymujemy odpowiedź: 2π cm/s.

6. Liczba x jest ułamkiem, czyli ma 0 przed przecinkiem. W systemie ósemkowym kolejne miejsca po przecinku oznaczają części: 1/8, 1/64, $1/8^3$ itd. Skoro rozwinięcie ósemkowe x ma 5 cyfr, to liczba ta wynosi $L/8^5$, gdzie licznik L ma wartość naturalną. A to jest $L/2^{15}$, co po rozszerzeniu ułamka przez 5^{15} można zapisać jako $K/10^{15}$. To oznacza, że w systemie dziesiętnym x ma po przecinku <u>nie więcej</u> niż 15 cyfr. Za odpowiedz 15 odejmujemy 4 pkt (cyfr może być mniej, bo nie znamy wartości L i licznik może się z mianownikiem poskracać).

7. Widać, że 0 spełnia równanie (obie strony przyjmują wartość 1). Lewa strona jest funkcją malejącą (wykładnicza o podstawie $\in (0,1)$), a prawa rosnącą (rosnąca funkcja wykładnicza pomnożona przez stałą i pomniejszona o stałą), zatem dla $x>0$ prawa strona będzie większa od 1, a lewa mniejsza, a dla $x<0$ odwrotnie, czyli w obu przypadkach równanie nie ma pierwiastków. Jedynym pierwiastkiem jest więc 0. Za samo stwierdzenie, że 0 spełnia równanie, bez uzasadnienia, że nie ma innych pierwiastków, przyznajemy 1 pkt.

8. Mamy 1001 sum i dają one po zsumowaniu 2·(1+2+...+1001), czyli liczbę parzystą. Gdyby wszystkie obliczone sumy były nieparzyste, 2·(1+2+...+1001) byłoby sumą nieparzystej (1001) liczby liczb nieparzystych, więc nie byłoby parzyste, zatem przynajmniej jeden widz otrzymał parzystą sumę.

9. Pomnóżmy obie strony równości danej w zadaniu przez $\sqrt{2}$. Otrzymamy $f(x+1)\sqrt{2}+f(x-1)\sqrt{2}=2f(x)$, co dalej z warunku na funkcję f zastosowanego do x+1 i x–1 daje $\left(f(x)+f(x+2)\right)+\left(f(x-2)+f(x)\right)=2f(x)$, skąd $f(x+2)+f(x-2)=0$. Równość ta zachodzi dla wszystkich x, mamy więc też (dla x+4) $f(x+6)+f(x+2)=0$. Z obu ostatnich równości wynika, że dla każdego x zachodzi $f(x+6)=f(x-2)$, czyli f jest funkcją okresową o okresie 8.

10. Ponieważ f jest ciągła, w zbiorze $(1, \pi]$ istnieją p i q, takie że f przyjmuje w p swoją największą, a w q – najmniejszą wartość. Jeśli na $(1, \pi]$ określimy funkcję $g(x)=f(x)-f(x-1)$, to $g(p) \geq 0$ i $g(q) \leq 0$. Jako różnica dwóch funkcji ciągłych g jest funkcją ciągła, więc przyjmuje wartość 0 w punktach p lub q lub pomiędzy nimi. $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(x-1)$, co kończy dowód.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ III

1. Przy sprzedaży tony gwoździ półcalowych uzyskuje się zysk wynoszący p% ceny zakupu, czyli q% ceny sprzedaży. Ile wynosi $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$?

2. Naszkicuj wykres funkcji $y=\sqrt{x\cdot\dfrac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}}$.

3. Asia i Basia grają w następującą grę: na płaszczyźnie wybierają n dowolnych punktów i na zmianę dorysowują jeden punkt, łącząc go jednocześnie z dowolnymi dwoma już narysowanymi, tak żeby rysowane linie nie przecinały się i żeby z każdego punktu wychodziły najwyżej trzy takie linie. Udowodnij, że w pewnym momencie któraś z dziewczyn nie będzie mogła wykonać ruchu.

4. Czy można tak rozmieścić na płaszczyźnie 7 punktów i nieprzecinające się odcinki o końcach w tych punktach, żeby każdy punkt był połączony z dokładnie trzema z sześciu pozostałych punktów?

5. Udowodnij, że w czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w dwa trójkąty, na które dzieli ten czworokąt jego przekątna, mają wspólny punkt.

6. Dla jakich liczb pierwszych p i q p^q+q^p jest również liczbą pierwszą?

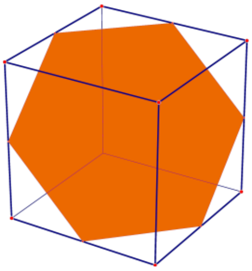
7. Czy z każdej liczby naturalnej można przez zamianę jednej cyfry otrzymać liczbę pierwszą?

8. Znajdź granice pierwiastków wielomianu ax^2+bx+c o wszystkich współczynnikach ujemnych przy $a\to 0$.

9. Wykaż, że dla dowolnego a dodatniego $\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}<\sqrt{a}+1$, niezależnie od tego, ile pierwiastków jest po lewej stronie.

10. Sześcian o krawędzi długości 3 podzielono na 27 sześcianów jednostkowych, a następnie usunięto pewne sześcianiki, przepychając na wylot kostki leżące na środku każdej ściany wyjściowego sześcianu (rys. A). Uzyskaną w ten sposób bryłę przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki pewnych krawędzi oryginalnego sześcianu (rys. B). Jaką figurą jest otrzymany przekrój?


rys. A


rys. B

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

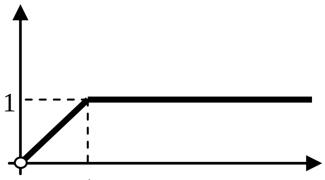
LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁÓWA, MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy przez z cenę zakupu, a przez s cenę sprzedaży. Zysk to $s–z$ i z warunków zadania jest on równy $p\%z = q\%s$. Mamy więc: $s–z = pz/100$ i $pz = qs$. Z drugiego równania $p=\frac{qs}{z}$, skąd po podstawieniu s wyznaczonego z pierwszego równania $p=\frac{q(\frac{pz}{100}+z)}{z}=q\cdot(\frac{p}{100}+1)$, skąd $\frac{1}{q}=\frac{1}{100}+\frac{1}{p}$, czyli szukana różnica wynosi 0,01.

2. $y=\sqrt{x\cdot\frac{\sqrt{\frac{1+2x+x^2}{2x}}-\sqrt{\frac{1-2x+x^2}{2x}}}{\sqrt{\frac{1+2x+x^2}{2x}}+\sqrt{\frac{1-2x+x^2}{2x}}}}=\sqrt{x\cdot\frac{\frac{|1+x|-|1-x|}{\sqrt{2x}}}{\frac{|1+x|+|1-x|}{\sqrt{2x}}}}=\sqrt{x\cdot\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}}$, przy $x>0$. Rozpatrzmy 2 przyp.

   A) jeśli $x>1$, $y=\sqrt{x\cdot\frac{1+x+(1-x)}{1+x-(1-x)}}=\sqrt{\frac{2x}{2x}}=1$;

   B) jeśli $x\in(0,1]$, $y=\sqrt{x\cdot\frac{1+x-(1-x)}{1+x+(1-x)}}=\sqrt{\frac{2x^2}{2}}=|x|=x$.

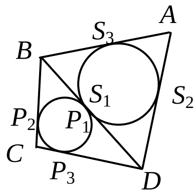
   

   Szukany wykres wygląda jak na rysunku. Za niewykluczenie zera z dziedziny w trakcie przekształceń odejmujemy 3 punkty. Jeśli zostało to powiedziane, ale nie uwzględnione przy rysowaniu wykresu, odejmujemy 2 punkty.

3. Po każdym ruchu w wyniku poprowadzenia dwóch połączeń liczba wszystkich możliwych końców linii spada o co najmniej 1 (dorysowany punkt może być użyty jako koniec jeszcze tylko jednej linii, a oba punkty, do których poprowadzono teraz połączenia, mogą być teraz użyte o jeden raz mniej niż przed tym ruchem). Dojdziemy więc w pewnym momencie do sytuacji, gdzie dorysowywany punkt będzie można połączyć z mniej niż dwoma istniejącymi punktami, czyli nie będzie się dało wykonać ruchu.

4. W sposób opisany w zadaniu nie da się połączyć punktów żadnymi liniami – z każdego punktu ma ich wychodzić po 3, więc $7\cdot3=21$ musiałoby być równe podwojonej liczbie połączeń (każde liczymy w ten sposób dwa razy – przy dwóch jego końcach), czyli liczbie parzystej.

5. Oznaczmy wierzchołki czworokąta A, $\boldsymbol{B}$, C, D. Poprowadźmy przekątną i w powstałe trójkąty wpiszmy okręgi, punkty styczności oznaczając jak na rysunku. Środki ich tych okręgów leżą na dwusiecznych odpowiednich kątów, więc zachodzą związki: (*) $AS_3= AS_2$, $BS_3= BS_1$, $DS_2= DS_1$, $DP_3= DP_1$, $BP_1= BP_2$, $CP_3= CP_2$. W czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $AB+CD = BC+AD$. Jest to równoważne równości $AS_3+BS_3+CP_3+DP_3 = AS_2+DS_2+BP_2+CP_2$, co po uwzględnieniu zależności (*) oznacza $BS_1+DP_1 = BP_1+DS_1$. Gdyby jeden z punktów P_1, S_1 leżał dalej od B niż drugi, odległości z jednej strony ostatniej równości dawałyby w sumie mniej, a z drugiej więcej niż BD. Dla $P_1=S_1$ równość ta oczywiście zachodzi, więc dowód jest zakończony.

6. Gdyby p i q były jednocześnie nieparzyste, to ich suma byłaby liczbą parzystą większą od 2, zatem jedna z liczb p i q musi być dwójką. Oznaczmy drugą z tych liczb przez k. Szukamy więc liczby pierwszej k, takiej że k^2+2^k jest też liczbą pierwszą. Podobnie jak poprzednio można zauważyć, że k musi być nieparzyste. 2^1 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2, a kolejne potęgi na zmianę 1 i 2: $2\cdot(3m+2) = 3(2m+1)+1$ i $2\cdot(3m+1) = 3\cdot2m+2$. Zatem 2^k daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2. (Za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 3 pkty.) Jeśli $k\neq3$, to k^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1 (bo $(3m+1)^2 = 3(3m^2+2m)+1$ i podobnie $(3m+2)^2 = 3(3m^2+2m+1)+1$). Zatem dla $k\neq3$ liczba k^2+2^k jest podzielna przez 3 i większa od 3, więc nie jest liczbą pierwszą. Jeśli $k=3$, otrzymujemy 17. Zatem liczby p i q to 2 i 3 (w dowolnej kolejności).

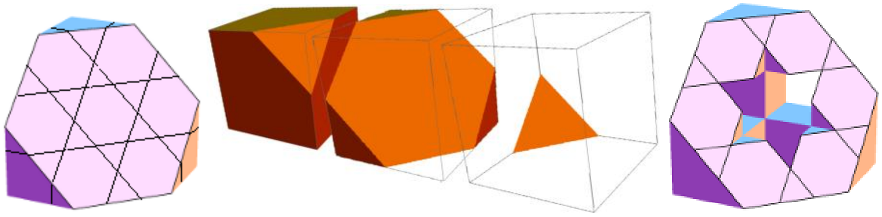
7. Nie. Rozpatrzmy np. liczbę $19!+10$. Jest to liczba kończąca się zerem, więc zmieniając jakąkolwiek inną jej cyfrę otrzymamy liczbę złożoną – podzielną przez 10. Zmieniając natomiast jej końcowe zero, możemy otrzymać liczby $19!+11$, $19!+12$, ..., $19!+19$, z których pierwsza dzieli się przez 11, druga przez 12 itd. Są to liczby większe od $19!$, więc te podzielności implikują ich złożoność, co kończy dowód.

8. $\Delta = b^2 - 4ac \to b^2$, więc wielomian ma w granicy pierwiastki. Niech $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

   $\sqrt{\Delta} \to \sqrt{b^2} = |b| = -b$. Zatem x_1 to iloraz wyrażenia dążącego do liczby ujemnej przez wyrażenie o wartości ujemnej dążące do zera, więc $x_1 \to \infty$. Natomiast $\lim x_2 = \lim \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{2a(-b+\sqrt{\Delta})} = \lim \frac{2c}{-b+\sqrt{\Delta}} = \frac{2c}{-b-b} = -\frac{c}{b}$.

9. Oznaczmy lewą stronę, w której występuje n pierwiastków, przez x_n. Wówczas $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a}+1$, natomiast z nierówności $x_n < \sqrt{a}+1$ wynika $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \left|\sqrt{a}+1\right| = \sqrt{a}+1$, co kończy dowód. Korzystamy tu z zasady indukcji matematycznej, ale wystarczy, jeśli uczeń powie, że teza jest prawdziwa, ponieważ zachodzi dla x_1, skąd i dla x_2, zatem i dla x_3 itd.

10. I sposób. Dana płaszczyzna kroi małe kostki w taki sposób, że daje w przekrojach albo 6-kąty foremne, albo trójkąty równoboczne. Po „wyjęciu” z przekroju wypchniętych kostek, otrzymujemy sześciokąt z wyciętą „gwiazdą 6-ramienną”.



II sposób. Z sześcianu wycinamy „krzyż” złożony z 7 kostek ułożonych w 3 prostopadłe prostopadłościany. Każdy z nich przekrojony daną płaszczyzną daje romb. Po nałożeniu trzech takich rombów otrzymujemy „gwiazdę 6-ramienną”. Przekrój jest więc sześciokątem foremnym bez tej gwiazdy.