DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

1) W jednym szeregu napisano dwadzieścia piątek. Pomiędzy niektórymi wpisano znak plus i otrzymano sumę 1000. Czy to możliwe?

2) Jaka liczba dwucyfrowa jest o 57 większa od swojej cyfry dziesiątek?

3) Basia ma dwa razy mniej sióstr i dwa razy więcej braci niż jej brat Adam. Ile dzieci jest w tej rodzinie?

4) Na ile sposobów liczbę 145 można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych.

5) Ania pojechała z rodzicami pociągiem na ferie do Kołobrzegu. Po przejechaniu połowy drogi zasnęła. Spała tak długo, że gdy się obudziła, miała jeszcze do przejechania połowę drogi, którą przespała. Jaką część drogi przespała?

6) Ile minut na godzinę spieszy zegar wskazówkowy, który po dokładnym nastawieniu pokaże dobry czas po raz pierwszy za 60 dni?

7) Janek wykonał latawiec w kształcie trójkąta równobocznego z doklejonym wzdłuż jednego boku trójkątem równoramiennym. Listewki, z których wykonał przekątne latawca miały równe długości. Jakie są miary kątów wewnętrznych w jego latawcu?

8) W sadzie zrywano owoce. Z każdej gruszy zebrano trzy skrzynki gruszek, z każdej jabłoni – dwie skrzynki jabłek, a z każdej śliwy – skrzynkę śliwek. W sumie zebrano tonę owoców, a każda ich skrzynka ważyła 20 kg. W sadzie połowę drzew stanowią śliwy, trzecią część – jabłonie, a szóstą – grusze. Ile jest w nim drzew owocowych?

9) Czy sześciokąt foremny można podzielić na części, z których da się złożyć dwa trójkąty równoboczne?

10) Czy istnieje trójkąt, którego długości wszystkich wysokości są większe od 2 m, a jego pole jest mniejsze od 2 m^2?

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

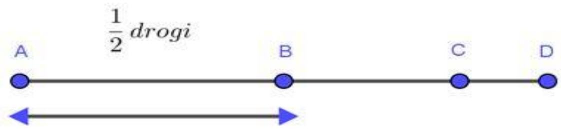
1. To możliwe, np. 1000 = 555+440+5 = 555 + 8·55 + 5 = 555 + 55+ … + 55 + 5. Piątek użyto 3+16+1 = 20.

2. Zapisujemy liczbę dwucyfrową jako $10a + b = 57$, skąd, $9a = 57 - b$, gdzie a, $b \in \{0, \dots, 9\}$ i $a \neq 0$. Jedyną liczbą podzielną przez 9 w zbiorze {48, …, 57} jest 54, zatem b=3 i a = 6, czyli jedynym rozwiązaniem jest 63. Za poprawną odpowiedź bez uzasadnienia, że jest jedyna, przyznajemy 4 pkt. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie, np. sprawdzanie różnych przypadków, odejmujemy 2 pkt.

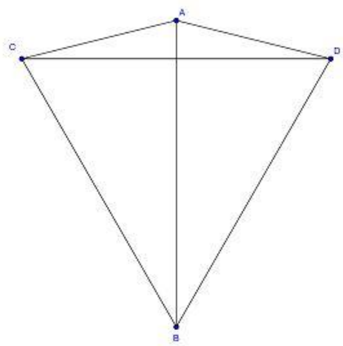
3. Niech c to liczba chłopców (braci Basi), a d to liczba dziewcząt (sióstr Adama). Wówczas Adam ma c–1 braci, a Basia ma d–1 sióstr. Mamy $c = 2(c-1)$, skąd $c = 2$. Mamy też $d = 2(d-1)$, skąd $d = 2$. Dlatego w rodzinie jest $c+d = 4$ dzieci. Za poprawną odpowiedź ze sprawdzeniem, ale bez uzasadnienia, że jest jedyna, przyznajemy 2 pkt.

4. Nie można. Liczba 145 jest nieparzysta, a suma dwóch liczb naturalnych jest nieparzysta tylko wtedy, gdy składniki mają różną parzystość. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, a 143 = 11·13, czyli nie jest pierwsze. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt. Za sprawdzanie 'na piechotę' różnych przypadków przyznajemy maksymalnie 6 pkt.

5. Na diagramie Ania zasypia w B i budzi się w C. Niech CD ma długość x. Wtedy $|BC|=2x$, $|BD| = |AB| = 3x$ i $|AD| = 6x$. Zatem BC stanowi trzecią część drogi.



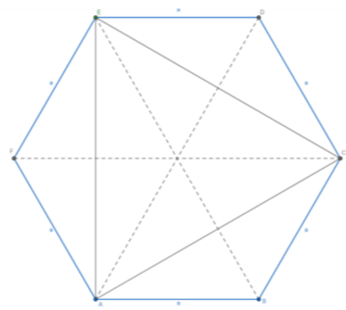
6. Zegar śpieszy 30 sekund na godzinę. 60 dni to 60·24=1440 godzin, Zegar musi w tym czasie wyprzedzić właściwy czas o 12 godzin, czyli 'zrobić' 1452 godziny. Oznacza to, że w ciągu jednej godziny robi 1452/1440 = 1 i $^{12}/_{1440}$ godziny, czyli o $^{12}/_{1440}$ godziny za dużo, ale $^{12}/_{1440}$ godziny to 0,5 minuty. Jeśli uczeń założy, że zegar musi zrobić dodatkowe 24 godziny (czyli że spieszy minutę na godzinę), przyznajemy 5 pkt.



7. Na podstawie warunków zadania latawiec jest deltoidem którego dłuższy bok i przekątne mają równe długości. Trójkąt CBD jest równoboczny, więc $|\angle B| = 60°$. Trójkąty CAB i ADB są przystające, równoramienne i mają kąty o miarach 75°, 75° i 30°. Stąd $|\angle A| = 150°$, $|\angle C| = 75°$, $|\angle D| = 75°$.

8. Zebrano 1000:20 = 50 skrzynek owoców. Jeśli x oznacza liczbę drzew, to śliw jest $x/2$, jabłoni $x/3$, a grusz $x/6$ i wtedy $50 = {}^{x}/_{2} + 2\cdot{}^{x}/_{3} + 3\cdot{}^{x}/_{6} = x + {}^{2}/_{3}x$. Stąd x=30.

9. Można. Prowadząc główne przekątne szesciokąta, otrzymyjemy podział na 6 trójkątów równobocznych. Łacząc co drugi wierzchołek sześciokąta, otrzymamy jeden trójkąt równoboczny składający się z 6 małych trójkątów ekierkowych (połówek równobocznych). Poza tym trójkątem pozotaje 6 identycznych trójkątów ekierkowych, z których można złożyć drugi trójkąt równoboczny.



10. Ponieważ wszystkie wysokości są większe od 2 m, długości wszystkich boków są również większe od 2 m, gdyż wysokość opuszczona z wierzchołka na bok jest najkrótszym połączeniem tego wierzchołka z bokiem (po prostopadłej), a boki wychodzące z tego wierzchołka muszą być co najmniej tak samo długie lub dłuższe. Zatem pole trójkąta jest większe od $^{1}/_{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2\ m^2$. Nie istnieje wiec trójkąt opisany w zadaniu. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ II

1. Czy istnieje taka liczba naturalna, której iloczyn cyfr jest równy 997920?

2. W schronisku dla zwierząt było tyle samo psów co kotów. Trzecia część psów i połowa kotów znalazła już opiekunów. Kiedy po sześć psów i jednego kota zgłoszą się jeszcze właściciele, w schronisku będzie więcej kotów niż psów. Ile psów było na początku w schronisku?

3. Autokar z Jeleniej Góry do Wrocławia wyjechał o 8 rano. Jechał ze średnią prędkością 80 km/h aż do chwili, gdy po przejechaniu 50 km złapał gumę. Wymiana koła zajęła kierowcy 30 minut. Z jaką średnią prędkością musi jechać autokar przez pozostałe 52 km, aby dotrzeć do Wrocławia na 9:40?

4. Obwód trójkąta wynosi 18 cm. Jakie są długości jego boków, jeżeli są to liczby naturalne i suma dwóch z nich jest o 6 większa od trzeciej?

5. Po turnieju sudoku jego 150 uczestników zaproszono na podwieczorek. Podano galaretkę z całymi truskawkami. W tym celu kucharka przygotowała 494 dorodne truskawki. Do niektórych salaterek włożyła 3 owoce, a do pozostałych 4. Ile było deserów z czterema truskawkami?

6. Cena myszy komputerowej jest liczbą dwucyfrową, wyrażoną w pełnych złotówkach. Po feriach właściciel sklepu podniósł tę cenę o 20%, a w tym celu wystarczyło na etykietce zmienić kolejność cyfr. Ile kosztuje teraz myszka?

7. Każdą z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 mnożymy przez każdą z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ile wynosi suma wszystkich otrzymanych w ten sposób iloczynów?

8. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąt ADC ma miarę 150°, a kąt DAB – 40°. Okrąg o środku D przechodzący przez punkt A przechodzi także przez punkty B i C. Jaką miarę ma kąt BCD?

9. Pewna tajemnicza dodatnia wielkość najpierw dziesięciokrotnie zmalała o 10%, a następnie dwudziestokrotnie wzrosła o 11%, by na koniec znowu dziesięć razy zmaleć o 10%. Czy to możliwe, żeby na końcu była większa niż na początku?

10. Dwa jednakowe czworokąty wypukłe rozcięto wzdłuż przekątnej: pierwszy z nich wzdłuż jednej, a drugi – wzdłuż drugiej. Czy z otrzymanych części zawsze można złożyć równoległobok?

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Rozkładamy liczbę na czynniki pierwsze: 997920 = $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Jeden z czynników wynosi 11 i jest nierozkładalny, zatem nie istnieje liczba naturalna spełniająca warunki zadania. Za stwierdzenie, że liczba pierwsza to liczba, która dzieli się przez 1 i samą siebie (lub TYLKO przez 1 i samą siebie) odejmujemy 2 pkt. (pierwszą własność mają wszystkie liczby naturalne, a drugą także liczba 1).

2. $P=K$ oraz $^{2}/_{3}P - 6 < {}^{1}/_{2}P - 1$. P musi być większe od 6 i być jest wielokrotnością 6. Niech wynosi $6x$, gdzie $x>1$ jest naturalne. Mamy $^{2}/_{3}\,6x - 6 < {}^{1}/_{2}\,6x - 1$, co daje $4x-6 < 3x-1$, skąd $x<5$, czyli przyjmuje wartości 2, 3 lub 4. Zatem P wynosi 12, 18 lub 24. Za pominięcie jednego wyniku dajemy 3 pkt. Za podanie jednego wyniku 0 pkt.

3. Prędkość średnia musi być dokładna. Za przybliżenie, odejmujemy 2 pkt. Odejmujemy 1 pkt za wynik w km/min. Na przejechanie 50 km z prędkością średnią 80 km/h autokar potrzebował $^{5}/_{8}$ godz. czyli 37,5 min. Razem z postojem daje to 67,5 min czyli 1i$^{1}/_{8}$ godz. Autokar ruszył 7,5 min po 9, więc do 9:40 pozostało 32,5 min, czyli $^{13}/_{24}$ godz. Aby w tym czasie przejechać 52 km musi jechać ze średnią prędkością 96 km/h.

4. Niech a, b, c to długości boków. Wiemy, że $a+b+c = 18$ i $a+b = c+6$ (z tego wynika już, że $a+b>c$). Z poprzednich równości mamy $c=6$, czyli $a+b=12$. Z nierówności trójkąta musi być jeszcze $a+c>b$ i $b+c>a$. Niech $a \leq b$, wówczas a przyjmuje wartości od 1 do 6. Otrzymujemy 6 par (a, b): (1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7) i (6, 6), z których tylko 3 spełniają warunki zadania, bo 6+1<11, 6+2<10 i 6+3=9. Warunki zadania spełniają więc trzy trójki liczb: (4, 8, 6), (5, 7, 6) i (6, 6, 6). Za pominięcie jednej przyznajemy 3 pkt, za podanie jednej przyznajemy) pkt.

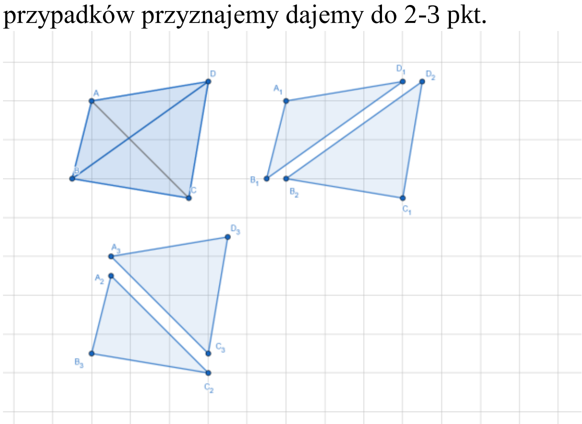
5. Gdy kucharka do 150 salaterek wrzuciła po 3 truskawki, zostało jej 494–450=44 truskawki i tylu dzieciom dorzuciła czwartą truskawkę. Za bardziej skomplikowany sposób odejmujemy 2 pkt.

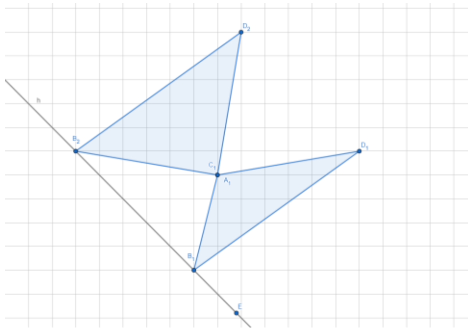
6. Pierwotną cenę myszki można zapisać jako $10a + b$ (gdzie a i b to niezerowe liczby jednocyfrowe). Zachodzi $1{,}2(10a+b) = 10b+a$, skąd $110a = 88b$, czyli $5a = 4b$. Prawa strona musi dzielić się przez 5 (bo lewa się dzieli), co oznacza $b=5$. Wówczas $a = 4$. Zatem myszka kosztuje obecnie 54 zł. Za rozwiązanie, z którego nie wynika, że to jedyna możliwość, przyznajemy 3 pkt. Za sprawdzanie warunków dla różnych cyfr odejmujemy 3 pkt.

7. Otrzymamy 100 iloczynów, których suma wynosi 3025. Suma liczb od 1 do 10 wynosi 55. Podaną sumę iloczynów możemy zapisać w postaci $(1+2+3+\ldots+10) + 2\cdot(1+\ldots+10) + 3\cdot(1+\ldots+10) + \ldots + 10\cdot(1+\ldots+10) = 55\cdot 55 = 3025$. Za poprawne, ale bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt.

8. Niech x jest miarą kąta BCD. Ponieważ odcinki DA, DB i DC są promieniami okręgu, trójkąty ADB i BDC są równoramienne, a kąty przy ich podstawach – jednakowe. Suma kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ wynosi $360 = 150+40+40+2x$. Stąd $x = 65°$.

9. Trójkąty powstałe z podziału czworokąta $ABCD$ przekątną BD przesuwamy równolegle, aby wierzchołki A i C pokryły się (nie wykonujemy żadnego obrotu). Przeciwległe boki są teraz równe (przekątna BD) i równoległe, a pozostałe 'dziury' można zapełnić trójkątami z drugiego podziału (w obu wypadkach zgadzają się boki i kąty między nimi, więc pasujący trójkąt jest jeden). Otrzymujemy czworokąt z dwiema parami równych boków (każda para równa innej przekątnej czworokąta). To musi być równoległobok. Za uzasadnienie tylko dla szczególnych przypadków przyznajemy dajemy do 2-3 pkt.





10. Niech początkowa wartość wynosi X. Po zmaleniu o 10% wynosi $0{,}9X$, a po 10 zmaleniach $0{,}9^{10}X$. Po wzroście o 11% wielkość wynosi $1{,}11\cdot 0{,}9^{10}X$. Na końcu wielkość wynosi $0{,}9^{10}\cdot 1{,}11^{20}\cdot 0{,}9^{10}X$, co z przemienności mnożenia daje $(0{,}9\cdot 1{,}11)^{20}X$. Liczba w nawiasie jest ułamkiem, więc pomnożona przez ułamek staje się jeszcze mniejsza. Ostateczny wynik jest ułamkiem wielkości X. Uczeń nie musi posługiwać się potęgowaniem, może używać wielokrotnego mnożenia. Za wykonywanie jakichkolwiek obliczeń odejmujemy 2 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ III

1. W każde pole diagramu należy wpisać średnią arytmetyczną liczb z pól sąsiednich. Ile wynosi *X*?

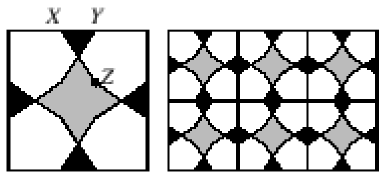
10			*X*		25

2. Przez jaką część doby na wyświetlaczu zegarka elektronicznego pokazującego czas w formacie 24-godzinnym (HH:MM) widoczna jest dokładnie jedna cyfra 8?

3. Czy istnieje trapez o podstawach długości 3 i 4, którego wysokość długości 5 jest jedną z przekątnych?

4. Janek zagiął prostokątną kartkę na 2 równe części wzdłuż jednej krawędzi i na 4 równe części wzdłuż drugiej, a następnie rozłożył ją. Ile prostokątów widać na rozłożonej kartce?

5. Na ile części mogą podzielić płaszczyznę 4 okręgi?



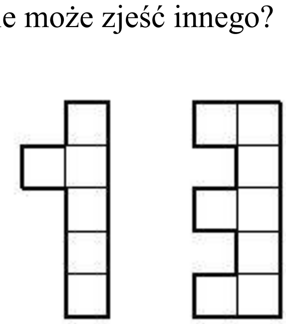
6. W Wielkanoc na podłodze katedry Michał zauważył ciekawy wzór ułożony z kwadratowych kafli z namalowanym kolorowym ornamentem (patrz rysunek). Zbadał, że każdy kafel miał 4 osie symetrii, jego bok miał 8 cm, a odcinek *XY* 2 cm. Punkt *Z* jest połączony z *X* odcinkiem, a *YZ* jest prostopadłe do boku kafla. Jakie pole zajmuje centralny, szary ośmiokąt?

7. Marek i Andrzej porównali swoje oszczędności, po czym Marek stwierdził: gdyby moje oszczędności wzrosły o 20%, a twoje zmalały o 20%, mielibyśmy po równo pieniędzy. Jaką część oszczędności Andrzeja stanowi kwota posiadana przez Marka?

8. Rozwiąż równanie $\frac{x+1}{1}+\frac{x+2}{2}+\frac{x+3}{3}+\ldots+\frac{x+2018}{2018}=2018$.

9. Na Wyspach Bergamutach żyją sarny, wilki i lwy. Wilki zjadają sarny, a lwy zjadają sarny i wilki. Gdy wilk zje sarnę, zmienia się w lwa. Gdy lew zje sarnę, zmienia się w wilka, a gdy zje wilka – zmienia się w sarnę. Początkowo na jednej z wysp było 17 saren, 55 wilków i 6 lwów. Jak najszybciej można doprowadzić do sytuacji, w której żadne zwierzę nie może zjeść innego? Ile zwierząt pozostanie wtedy na wyspie?

10. Jacek zbudował model bryły z jednakowych sześcianów. Pierwszy rysunek przedstawia jej widok z tyłu, a drugi – widok z góry. Ilu sześcianów użył Jacek do zbudowania bryły, jeśli wiadomo, że użył największej możliwej liczby klocków?



EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Średnia arytmetyczna wypada pośrodku dwóch liczb, zatem po wypełnieniu diagramu odległości między wszystkimi liczbami muszą być jednakowe. Zatem odległość między każdą parą sąsiednich liczb musi wynosić (25–10)/5 = 3. Kolejne liczby w diagramie to 10, 13, 16, 19, 22 i 25.

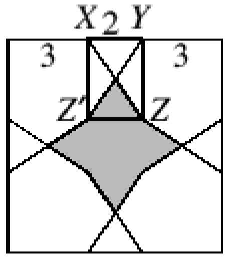
2. W ciągu godziny na minutowej części wyświetlacza cyfra 8 widnieje przez minutę 6 razy (:08, :18, :28, :38, :48, :58). Ponadto w ciągu dwóch godzin przez 54 minuty wyświetlana jest jedna cyfra 8 w części godzinowej wyświetlacza (08: oraz 18:). Podsumowując, w ciągu doby dokładnie jedna cyfra 8 jest widoczna przez 2·56 + 22· = 240 minut = 4 godziny = 1/6 doby.

3. Rysujemy odcinek *AB* długości 3, z punktu *B* prostopadły odcinek *BD* długości 5 i z punktu *D* znowu prostopadły odcinek *DC* długości 4 (w zwrocie półprostej *AB*). Łączymy punkty *A* z *D* i *B* z *C*. Czworokąt *ABCD* ma parę boków równoległych (*AB* i *CD*), wiec jest trapezem. Przekątna *BD* jest prostopadła do podstaw, więc jest wysokością. Za opis konstrukcji 5 pkt, za uzasadnienie poprawności konstrukcji 5 pkt.

4. Kartka została podzielona na kratę 2×4 prostokątów. Liczba prostokątów zagiętych na tej kracie wynosi 30. W tym jest 8 małych pojedynczych prostokątów, 10 prostokątów 2×1 (6 poziomych i 4 pionowe), 4 prostokąty 3×1, 2 prostokąty 4×1, 3 prostokąty 2×2, 2 prostokąty 3×2 i 1 prostokąt 2×4. Za pominięcie jednego lub dwóch odejmujemy po 4 pkt. Za pominięcie więcej niż dwóch 0 pkt.

5. Liczba części podziału zależy od liczby wzajemnych przecięć okręgów. Najmniejsza jest 5, gdy wszystkie okręgi są rozłączne, a największa 14, gdy każdy okrąg przecina się z każdym innym w dwóch unikatowych punktach. Za taką odpowiedź przyznajemy 5 pkt. Pozostałe punkty przyznajemy za sprawdzenie, że wszystkie możliwości pośrednie da się zrealizować.

6. Niech *Z*' leży pod *X* (*XYZZ*' tworzą prostokąt. Jeśli *XY* ma 2 cm, to odległość *Y* od najbliższego wierzchołka kafla wynosi 3 cm. Z symetrii jest to też długość *YZ*. Pole prostokąta *XYZZ*' wynosi 6 cm^2. Przekątne *XZ* i *YZ*' dzielą prostokąt na 4 części o równych polach (za brak uzasadnienia -3 pkt) po 1,5 cm^2. Szary ośmiokąt składa się z kwadratu o boku *ZZ*', czyli o polu 4 cm^2, oraz czterech trójkątów o polu 1,5 cm^2 każdy. Całość ma 10 cm^2.



7. Niech *M* to kwota Marka a *A* - kwota Andrzeja. Wówczas 1,2*M* = 0,8*A*, czyli 1,5*M* = *A*, czyli $^3/_2M = A$, czyli $M = {}^2/_3A$. Zatem kwota Marka stanowi $^2/_3$ oszczędności Andrzeja. Za odpowiedź przybliżoną w ułamku dziesiętnym odejmujemy 3 pkt.

8. Równanie można zapisać w równoważnej postaci $x+1+\frac{x}{2}+1+\frac{x}{3}+1+\ldots+\frac{x}{2018}+1=2018$ i dalej $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\cdots+\frac{x}{2018}+2018-2018=0$. Po wyłączeniu x przed nawias mamy $x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2018}\right)=0$. Liczba w nawiasie jest większa od 1, a iloczyn przyjmuje wartość zero tylko wtedy, gdy jeden z czynników jest zerem, zatem *x*=0.

9. Stan wyjściowy na wyspie to (*S*, *W*, *L*) = (17, 55, 6). W I kroku 17 wilków zje 17 saren, co daje stan (17–17, 55–17, 6+17) = (0, 38, 23). W II kroku 19 lwów zje 19 wilków, co daje stan (0+19, 38–19, 23–19) = (19, 19, 4). W III kroku 19 wilków zje 19 saren, co daje stan (19–19, 19–19, 4+19) = (0, 0, 23). W dwóch krokach nie da się wykonać zadania, co można sprawdzić rozważając inne możliwe ruchy. Na wyspie zostaną 23 lwy.

10. Budowla Jacka musi wyglądać tak jak na rysunku (widok z prawej i z lewej). Składa się z 17 sześcianów.