



**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**  
**EDYCJA IX – ROK SZKOLNY 2009/10**  
**LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA**  
**MECZ I**

1. Liczbę naturalną  $n$  podniesiono do 30 potęgi i otrzymano 42391158275216203514294433201. Jaka to była liczba?
2. Spośród 1000 uczestników międzynarodowej olimpiady matematycznej każdy zna biegle jakiś język obcy. 756 osób włada językiem angielskim, 621 – rosyjskim, 416 – francuskim, 471 – angielskim i rosyjskim, 315 – angielskim i francuskim a 228 – rosyjskim i francuskim. Ile osób włada tylko jednym językiem?
3. W poniedziałek pani Jabłczyńska kupiła pewną ilość jabłek. We wtorek jabłka podrożały o 50 % i za ilość jabłek o  $p\%$  mniejszą niż w poniedziałek zapłaciła o  $p\%$  więcej. O ile procent więcej jabłek kupiła pani Jabłczyńska w poniedziałek niż we wtorek?
4. Z urny, w której są 3 kule białe i  $n$  czarnych, wylosowano dwie kule. Prawdopodobieństwo, że były to dwie kule czarne, jest takie samo jak tego, że wylosowano kule różnych kolorów. Ile kul było w urnie?
5. Rozwiąż równanie z niewiadomą  $x$  i parametrem  $m$ :  $|m|(x+2|m|)=x+2$ .
6. Dla jakich liczb  $x$  podana równość jest prawdziwa dowolnych liczb naturalnych  $n$  i  $k$ ?
$$\binom{n}{k} + x \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}$$
7. Przekątne trapezu mają długość 5 cm, jedna z podstaw – 2 cm, a pole równe jest 12 cm<sup>2</sup>. Jaka długość ma promień okręgu opisanego na tym trapezie?
8. Rozwiąż nierówność:  $2^{\log_8(x^2-6x+9)} < 2^{2\log_x \sqrt{x}-1}$ .
9. Czy istnieje taka liczba niewymierna  $x$ , że suma tej liczby i jej odwrotności jest wymierna?
10. Spośród wierzchołków sześcianu można na różne sposoby wybrać cztery tak, aby były one wierzchołkami czworościanu. Który z tak wyznaczonych czworościanów ma największą objętość?



**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**  
**EDYCJA IX – ROK SZKOLNY 2009/10**  
**LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA**  
**MECZ II**

1. Rozwiąż równanie:  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y}$
2. Na półokręgu o końcach  $A, B$  obrano w kolejności od  $A$  do  $B$  punkty  $X, Y$  różne od końców, a na średnicy  $AB$  obrano punkt  $P$  również różny od końców. Uzasadnij, że  $\angle AXP + \angle PYB > 90^\circ$ .
3. Jaka jest najmniejsza liczba dziesięciocyfrowa o sumie cyfr równej 88 i podzielna przez 88?
4. W wypukłym czworokącie znaleźć punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.
5. W pewnej liczbie naturalnej zamieniono miejscami cyfry dziesiątek i jedności, a wtedy wartość liczby zmalała o 10%. Jaka to była liczba?
6. Jak przez dany punkt wewnątrz danego kąta skonstruować prostą odcinającą od tego kąta trójkąt o najmniejszym polu.
7. Czy można za pomocą 30 monet o nominałach groszowych dwóch rodzajów wypłacić kwotę 10 zł?
8. Jaki znak ma liczba  $\sin \sqrt{77}$ ?
9. Czy w czworokącie wypukłym o bokach długości 5, 7, 5, 1 (z zachowaniem kolejności) przekątne są prostopadłe?
10. Dla jakich wartości  $x$  liczby  $1 + \log_2 3$ ,  $\log_x 36$  i  $\frac{4}{3} \log_8 6$  tworzą ciąg geometryczny?



**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**  
**EDYCJA IX – ROK SZKOLNY 2009/10**  
**LICEA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA**  
**MECZ III**

1. Państwo Kowalscy zaprosili na kolację pięć innych małżeństw. Ponieważ nie wszyscy się znali, osoby, które się nie znały, zostały sobie przedstawione i wymieniły uścisk dłoni (osoby znające się nie wymieniały żadnych uścisków). Pod koniec przyjęcia pan Kowalski zapytał wszystkie pozostałe osoby, ile uścisków dłoni wymieniły. W odpowiedzi uzyskał 11 różnych liczb. Ile dłoni ucisnęła pani Kowalska?
2. Na wyspie Opatowickiej żyje 45 kameleonów: 14 zielonych, 15 czerwonych i 16 niebieskich. Gdy spotykają się dwa kameleony różnych barw, obydwa zmieniają kolory na ten trzeci. Czy może się zdarzyć, że po pewnej liczbie spotkań wszystkie kameleony będą tego samego koloru?
3. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $|x + 3| = m^2 - 2m$  ma dwa różne rozwiązania ujemne?
4. Dla jakich  $k$  można zapisać jedna pod drugą trzy różne permutacje liczb od 1 do  $k$  tak, aby po dodaniu liczb stojących w pionowych kolumnach otrzymać  $k$  kolejnych liczb naturalnych?
5. Czy wśród liczb większych od 1 zapisanych w systemie dziesiętnym za pomocą samych jedynek istnieje taka, która jest kwadratem liczby naturalnej?
6. W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  poprowadzono wysokość  $CH$ . Z punktu  $H$  poprowadzono odcinki  $HM$  i  $HN$ , prostopadłe odpowiednio do boków  $AC$  i  $BC$ . Udowodnij, że trójkąty  $ABC$  i  $NMC$  są podobne.
7. W sześcianie o krawędzi długości 1 m fruwa 2010 much. Czy można tak wybrać kulę o promieniu 9 cm, by fruwały w niej co najmniej 3 muchy? Kula może wystawać poza sześcian.
8. Dany jest półokrąg o średnicy  $AB$ . Chcemy na nim zaznaczyć punkt  $M$  w taki sposób, by suma jego odległości od punktów  $A$  i  $B$  była największa z możliwych. Gdzie powinien leżeć taki punkt?
9. Są dwie loterie liczbowe. W jednej losowanych jest 6 liczb z 40, los kosztuje 4 złote, a główna wygrana to milion złotych. W drugiej losuje się 7 liczb z 42, los kosztuje 2 złote, a nagroda główna to 3,5 miliona złotych. Nagrody główne przyznawane są tylko za trafne wytypowanie wszystkich liczb. W którą z tych loterii bardziej opłaca się grać?
10. Wiadomo, że  $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ . Ile wynosi  $x^2$ ?