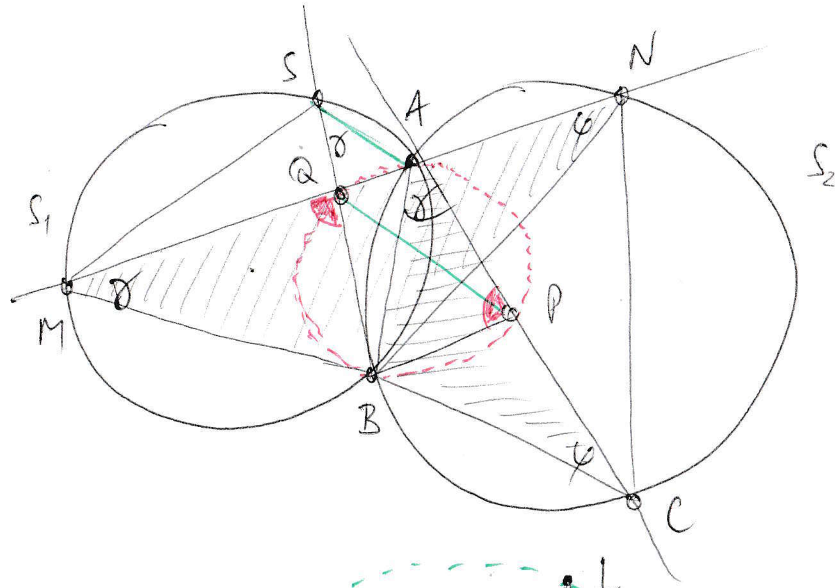
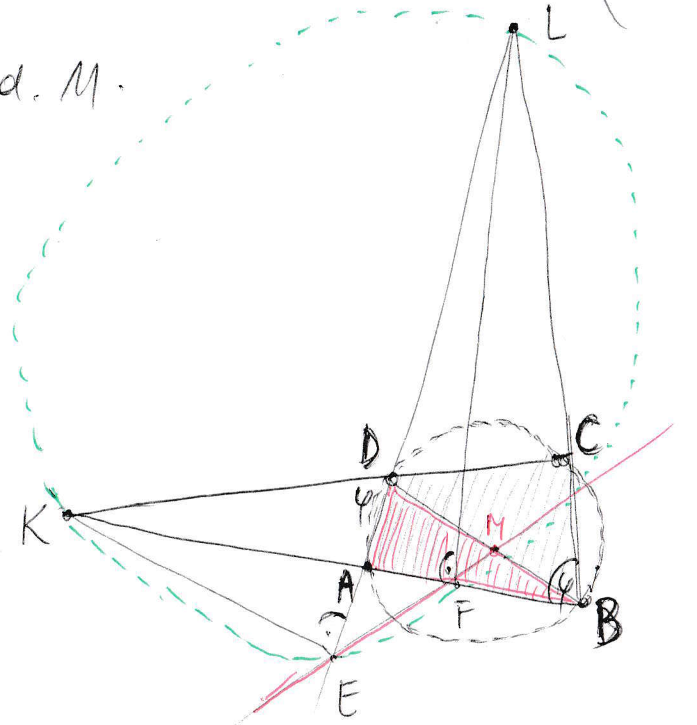
Zad 10



Oznaczmy jak na rysunku. Zauważmy że $\Delta MBN \sim \Delta ABC$

Dalej BQ i BP są środkowymi w tych trójkątach, stąd $\Delta MBQ \sim \Delta BPA$ przy czym $\sphericalangle MQB = \sphericalangle BPA$. Oznacza to że na czworokącie $BPAQ$ można opisać okrąg stąd $\sphericalangle BQR = \sphericalangle BAP = \gamma$. Otrzymujemy równe łuki odpowiadające $\sphericalangle BSA = \sphericalangle BQP$. Stąd teza.

Zad. 11.



Zauważmy że z „korony" prostokątnej ($\sphericalangle KEL = \sphericalangle KFL = 90°$) na czworokącie $KEFL$ można opisać okrąg. Dalej z założenia mamy $\sphericalangle KDE = \sphericalangle FBL = \varphi$. Stąd $\Delta LFB \sim \Delta KED$ *

Z tw. Menelaosa dla ΔABD i prostej EF mamy

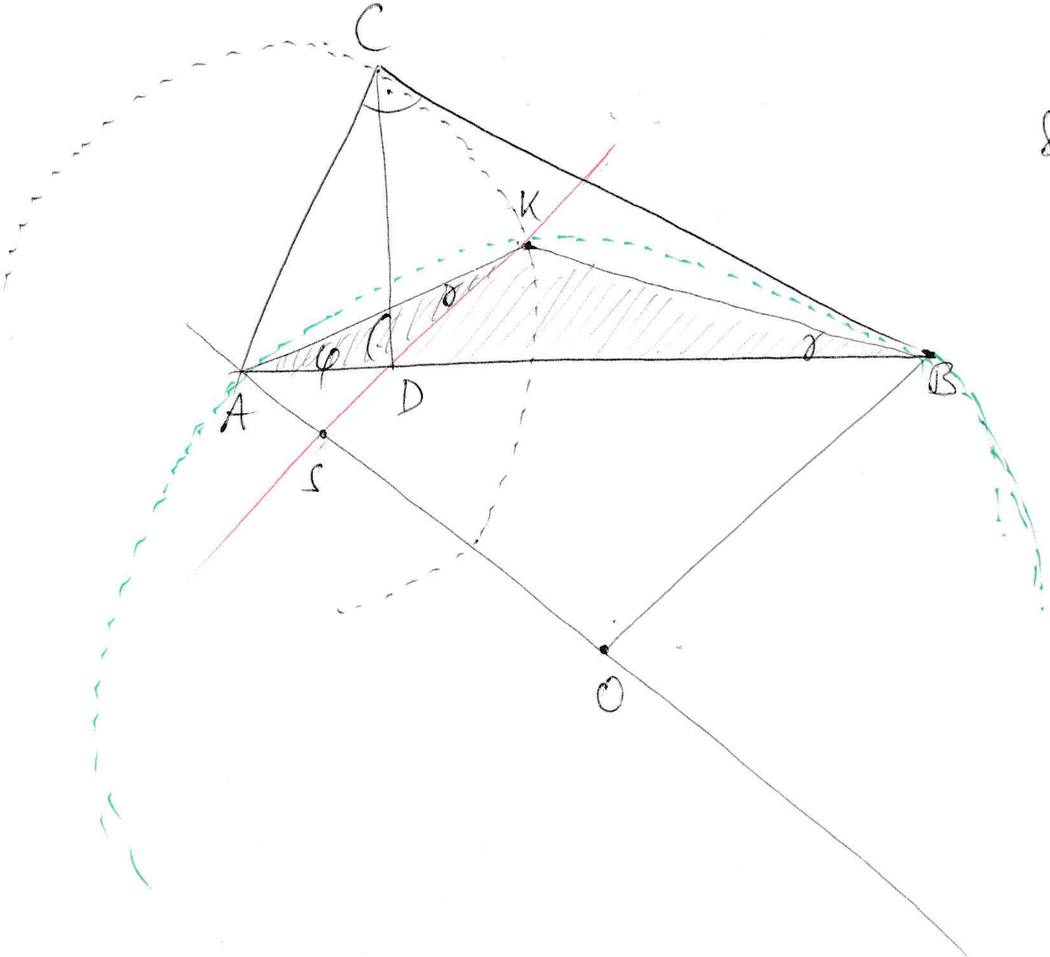
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BM}{MD} \cdot \frac{DE}{EA} = 1.$$ M jest środkiem boku BD $\Leftrightarrow \frac{AF}{FB} \cdot \frac{DE}{EA} = 1$

Zauważmy teraz że $\Delta AFL \sim \Delta AEK$ (oba prostokątne i kąt wierzchołkowy) **

Z obu podobieństw otrzymujemy $\frac{DE}{FB} \overset{*}{=} \frac{EK}{FL} \overset{**}{=} \frac{AE}{AF}$

Stąd teza

Zad. 12



Z własności trójkąta prostokątnego $AC^2 = AD \cdot AB$.
Stąd $AK^2 = AD \cdot AB$. Przekształcając otrzymujemy

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AD}{AK}$$ stąd $\triangle ADK \sim \triangle AKB$.

Zatem $\angle AKD = \angle ABK = \gamma$. Z drugiej strony $\angle AKB = 180^\circ - (\varphi + \gamma)$ stąd $\angle AOB = 2(\varphi+\gamma)$.
Zatem $\angle BAO = \angle OBA = 90 - (\varphi + \gamma)$.
Ale $\angle ADS = \angle KDB = \varphi + \gamma$ (bo zewnętrzny dla $\triangle ADK$) stąd $\angle ASD = 90^\circ$.

Zad. 12.