

Zadanie 1. (7 pkt.) Mniej czy więcej?

Z sześcioma kartami (trzema dodatnimi i trzema ujemnymi) szansa Pawła na wygraną Pawła 12/30, a Piotra - 18/30. Z pięcioma kartami (trzema dodatnimi i dwiema ujemnymi) szansa Pawła na wygraną wynosi 8/20, a Piotra 12/20. Ponieważ $12/30 = 8/20 = 2/5$, **Paweł nie ma racji. Wyjęcie karty z liczbą ujemną nie wpłynie na jego szanse wygranej.**

	+1	+2	+3	-1	-2	-3
+1		+	+	-	-	-
+2	+		+	-	-	-
+3	+	+		-	-	-
-1	-	-	-		+	+
-2	-	-	-	+		+
-3	-	-	-	+	+	

	+1	+2	+3	-1	-2
+1		+	+	-	-
+2	+		+	-	-
+3	+	+		-	-
-1	-	-	-		+
-2	-	-	-	+	

Zadanie 2. (5 pkt.) Złoty i srebrny

Ponieważ ACB , CBD i ADC są równoramienne, zachodzą równości kątów ACD , CAD i CBD (niech będą równe α) oraz kątów DCB i CDB (niech będą równe β). Sumy miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° , co daje układ równań:

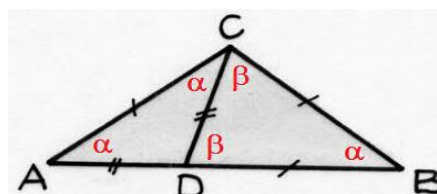
$$\alpha + 2\beta = 180^\circ \text{ (trójkąt } DBC)$$

$$3\alpha + \beta = 180^\circ \text{ (trójkąt } ABC).$$

Jego rozwiązaniem jest $\alpha = 36^\circ$ i $\beta = 72^\circ$.

Istnieją inne sposoby rozwiązania, nie wykorzystujące układów równań.

Uwaga. Trójkąt BCD jest **złotym trójkątem**, a ADC - **srebrnym trójkątem**. Złoty trójkąt (zwany też boskim) to taki trójkąt równoramienny, w którym stosunek długości ramienia do długości podstawy jest równy **liczbie złotej**. Srebrny trójkąt to taki trójkąt równoramienny rozwartokątny, w którym stosunek długości ramienia do długości podstawy jest **odwrotnością liczby złotej**.



Zadanie 3. (7 pkt.) Rozłożona kostka

6 5 1 2	6 4 1	6 2	6	2 6 5
3	3 5	3 5 4	3 5 4 2	3
1	1	1	1	1 5
4	4	4	4	4
Summe 22	Summe 24	Summe 25	Summe 25	Summe 26
2 4	2	1 2	1	5
3 6	3 6 4	3	3 2	3
1 5	1 5	1 5 6	1 5 6	1 5 6 2
4	4	4	4	4
Summe 25	Summe 25	Summe 22	Summe 22	Summe 26
6 3 1	6 5	6	4 6	4
2	2 3	2 3 5	2	2 6
1	1	1	1 3	1 3
4 5	4 5	4 5	4 5	4 5
Summe 22	Summe 26	Summe 26	Summe 25	Summe 25
1	6 2	6	5	6
2	4	4 2	4	5
1 3 6	1	1	1 2	1
4 5	4 5 3	4 5 3	4 5 3	4 5 3 2
Summe 22	Summe 25	Summe 25	Summe 24	Summe 26

Rysunki wskazują sumy uzyskane wzdłuż każdej z dróg. Jest 5 dróg za 22 punkty, dwie za 24 punkty, 8 za 25 punktów i 5 za 26 punktów. Należy wskazać wszystkie drogi za 22 i 26 punktów.

Zadanie 4. (5 pkt.) Przywołanie do porządku

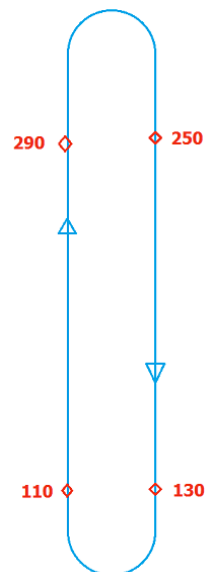
Puste pole oznaczmy jako 0. Celem gry jest dojście do układu 123450. Zadanie można rozwiązać wprost lub dokonać analizy wstecznej, np. tak: Żetony 3, 4 i 5 nie mogą stanąć na pustym polu, bo byłyby przestawione 2 razy. Są możliwe 2 strategie postępowania:

123450	123450
023451	103452
320451	143052
325401	043152
305421	340152
345021	345102

Mamy zatem dwa rozwiązania: 345021 i 345102.

Zadanie 5. (7 pkt.) Wymijające krzeselka

Oskar, siedząc na krześle 110, widzi, jak zjeżdża krzesło 130, ma zatem krzesło nr 1 przed sobą. Krzesło nr 1 jest pomiędzy Elizą i Oskarem. Pomiedzy 130. i 250. krzesłem jest 119 krzesel. Również pomiędzy Elizą i Oskarem jest 119 krzesel: 109 od numeru 1 do 109 i jeszcze 10 za Elizą, od numeru 291 do numeru 300. Wszystkich krzesełek na wyciągu jest $290+10 = 300$.

**Zadanie 6. (5 pkt.) Cyfry i litery**

$D \times D = I$, czyli I jest kwadratem, więc może być równe 4 lub 9 (1 odpada bo $D \neq I$).

Jeśli $I=9$, to $D=3$, a $T=27$, bo $T - D = I$. Ten przypadek odrzucamy, bo T ma być jednocyfrowe.

Zatem $I=4$, $D=2$, a $T=8$. Bez trudu odnajdujemy inne wartości. Kod to 538142.

Zadanie 7. (7 pkt.) Za dużo tych trolli

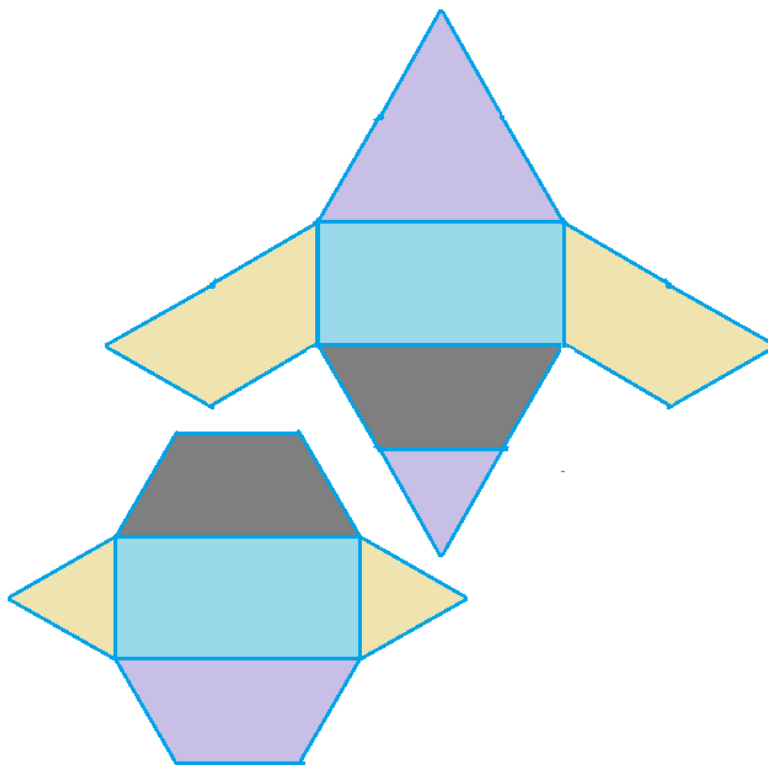
Rozpoczynamy od znalezienia liczby trolli w każdej sali. Jest ich 24 w rzędzie/szeregu, 11 w C i O w B , stąd 13 trolli jest w A . Następnie, rozważając warunki typu $D + G + A = 24$ (dla $A = 13$), otrzymujemy dość łatwo: $D = 6$, $E = 8$, $F = 10$, $G = 5$, $H = 16$ i $I = 3$. Wiedząc, że jest tylko 20 cudownych eliksirów, metodą prób i błędów znajdujemy metodę wyjścia. **Jedyną możliwą drogą jest BEDG.**

Zadanie 8. (5 pkt.) Zabawa na platformie

Aby mrówka przeszła z I części toru na ruchomą platformę, stosunek prędkości mrówki i platformy musi wynosić $6:9$. Tymczasem $\frac{9,2-6}{4,8} = \frac{6}{9}$, zatem we właściwym momencie III część toru będzie przedłużeniem II i mrówka będzie mogła bez przeszkód przebyć cały tor.

Zadanie 9. (7 pkt.) Bryła w kawałkach

Na poniższych siatkach szara ściana jest śladem płaszczyzny przekroju. Kąty o mierze 60° są konsekwencją krojenia równobocznych ścian wyjściowego ostrosłupa. **Oto jedna z możliwych siatek każdej z brył.**

**Zadanie 10. (10 pkt.) Trójkąty na geoplanie**

Trójkąt ABC jest równoboczny (3 boki po 3 jednostki). Taki jest również trójkąt ADE (jego trzy boki są dłuższymi przekątnymi trzech przystających równoległoboków o bokach 2 jednostki i 1 jednostka). Pole $\triangle ABC = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4}$, gdzie $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy $AD =$

$\sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$. Pole $\triangle ADE = \frac{7\sqrt{3}}{4}$. Zatem stosunek pól obu trójkątów wynosi

$$\frac{7\sqrt{3}}{4} : \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{9}.$$

- Stosunek pól trójkątów można obliczyć prościej jako stosunek kwadratów długości ich boków.
- Sprytnym sposobem rozwiązania jest też zmierzenie pól trójkątów, przyjmując za jednostkę pole trójkąta siatki. Mamy wtedy: pole $\triangle ABC = 9$,
pole $\triangle ABD =$ pole $\triangle ACE$, bo są przystające (bbb), stąd pole $\triangle ABC =$ pole $ADCE$.
Zatem pole $\triangle ADE =$ pole $ACDE -$ pole $\triangle DCE = 9 - 2 = 7$, więc stosunek pól trójkątów ADE i ABC wynosi $7/9$.

Zadania dodatkowe dla I klas szkół ponadgimnazjalnych

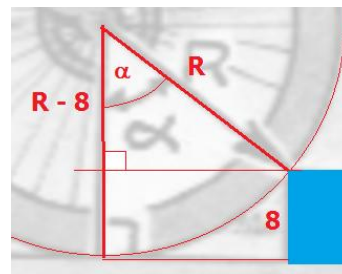
Zadanie 11. (5 pkt.) Które kółka są lepsze?

Mamy $\cos \alpha = (R-8)/R$

Otrzymujemy:

R (cale)	13	13,75	14,5
α (stopnie)	67,38	65,28	63,37

Rzeczywiście większe koła wymagają mniejszego wysiłku przy pokonywaniu przeszkód.

**Zadanie 12. (7 pkt.) Wolne - równe - bratnie (ułamki)**

$$\frac{12}{5} = \frac{9}{5} + \frac{3}{5}, \quad \frac{93}{55} + \frac{39}{55} = \frac{132}{55} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{10a+b}{11c} + \frac{10b+a}{11c} = \frac{11a+11b}{11c} = \frac{11(a+b)}{11c} = \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Zadanie 13. (10 pkt.) Przepis na sukces

(dla I klas szkół ogólnokształcących)

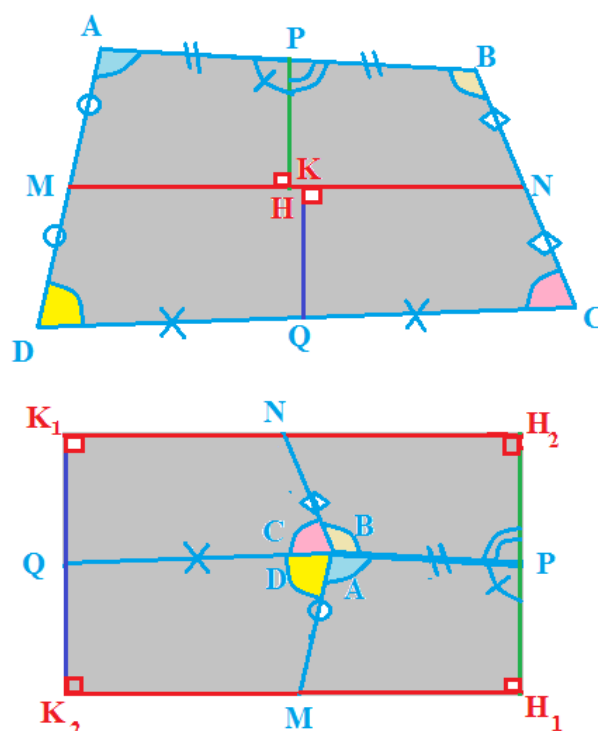
P jest środkiem boku AB , więc $|PA| = |PB|$. Po sklejeniu tych boków punkty A i B będą się pokrywały. Kąty o wierzchołku P są przyległe, więc punkty H_1 , P i H_2 będą po sklejeniu leżały na jednej prostej.

Suma kątów czworokąta wynosi 360° , więc po sklejeniu w jednym punkcie wierzchołków A , B , C , D otrzymamy także czworokąt. Wszystkie jego kąty będą proste, więc będzie to prostokąt. Długość jego jednego boku

wynosi $\frac{2 \cdot |MN|}{2} = |MN|$, a długość drugiego wynosi $2|PH|$

$= 2|QK|$. Zatem pole wynosi $2|MN| \times |PH|$.

Aby obliczyć pole czworokąta wypukłego $ABCD$, należy zmierzyć długość odcinków MN i PH , a następnie podstawić do powyższego wzoru.



Zadanie 13. (10 pkt.) Zabójstwo z zimną krwią**(dla I klas szkół zawodowych)**

Zabójstwa dokonano między 16.41 a 16.42.

	B2	f_x	$= (107*B1-141)/100$			
	A	B	C	D	E	F
1	0	30,00		17h 12		
2	-1	30,69	$< = (107*B1-141)/100$	17h 11		
3	-2	31,43		17h 10		
4	-3	32,22		17h .09		
		:				
30	-29	90,27		16h 43		
31	-30	95,18		16h 42		
32	-31	100,43		16h 41		
33	temps	température				
34						