Zadanie 1 (7 punktów) **– Wybrać portret**

Rozpatrujemy 3 przypadki (A - prawdziwe, B i C - fałszywe; A - fałszywe, B - prawdziwe i C fałszywe; A i B – fałszywe, C - prawdziwe). Dwa pierwsze przypadki prowadzą do sprzeczności, trzeci nie. **Portret znajduje się zatem w skrzyni A.**

Zadanie 2 (5 punktów) **– Okryte tajemnicą**

Zauważmy, że 12 odcinków tworzących obwód zakreskowanej figury odpowiada dwunastu częściom obwodu kartki niezłożonej. Suma obwodów 4 zakreskowanych trójkątów jest zatem równa obwodowi kartki formatu A4 i wynosi **101,4 cm.**

Zadanie 3 (7 punktów) **– W poszukiwaniu równowagi**

Istnieje wiele sposobów rozwiązania tego zadania, oto jeden z nich:

Niech R, K, G, P, x będą masami ryby, konika morskiego, rozgwiazdy, patyka i zakrytej figury. Dla całej karuzeli otrzymujemy pierwsze równanie:

2P+3R+2G+1K = 3R+3P+3K+x a stąd

(1) 2G = P+2K+x,

Gdy weźmiemy pod uwagę jedynie zrównoważenie tego, co zakryte jest dłonią, otrzymamy drugie równanie: x=2K+P, a stąd

(2) P = x – 2K.

Podstawiając (2) do (1) otrzymujemy x=G.

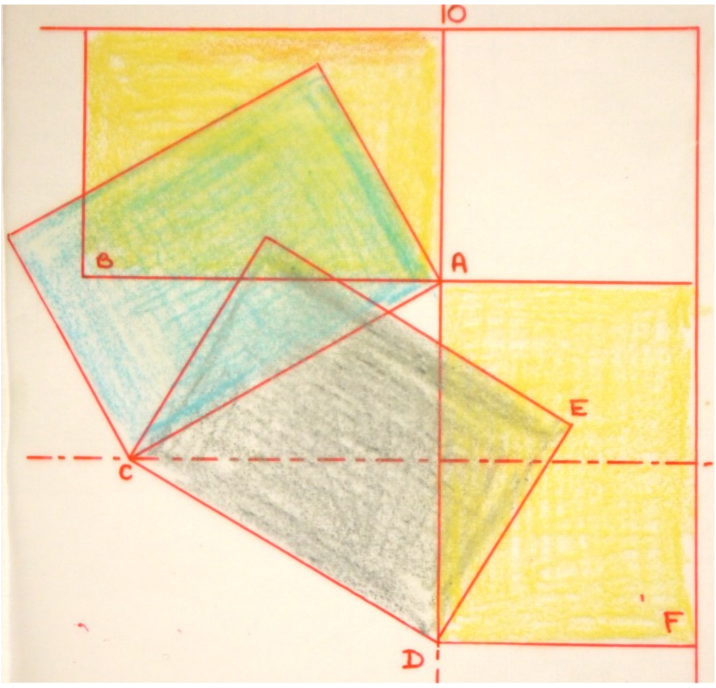
Figurą, która kryje się za dłonią jest rozgwiazda.

Zadanie 4 (5 punktów) **– Matematyczny film**

Niech n będzie liczbą klatek filmu. W kinie czas trwania wynosi $n/24$, natomiast w telewizji - $n/25$. Różnica między dwoma czasami trwania wynosi zatem $n/24 - n/25$ i jest równa 9 i pół minuty, czyli 570 sekund. Otrzymujemy n = 570s·24·25. **Film w wersji kinowej trwa zatem 570 s 25 = 14250 s = 3 godz. 57 min 30 s , czyli 3 godz. 57 min. 30 s, a w wersji telewizyjnej570 s 254= 13680 s = 3 godz. 48 min**

Zadanie 5 (7 punktów) **– Ciężka sprawa!**

Uwaga: Dołączony szkic nie jest w odpowiedniej skali.



Obracamy sejf w punkcie A, tak aby punkt B dotarł do punktu C. Punkt C jest położony na symetralnej odcinka AD. Obracamy sejf w punkcie C, aby A dotarł do D. Punkt D jest współliniowy z O i A. Obracamy w punkcie D, aby punkt E dotarł do punktu F.

Zadanie 6 (5 punktów) – Poziom rośnie

Jeśli poziom zdawalności w 2013 wynosi t, to poziom zdawalności w 2014 wynosi $1{,}2t$. Różnica między poziomami wynosi $1{,}2t-t=0{,}2t$ i jest zgodna z porównaniem ucznia (12%), czyli $t=60\%$. Poziom wzrósł z 60% do **72% zdawalności w 2014 roku.**

Zadanie 7 (7 punktów) – Mniam - mniam

Przykładowo, w ciągu 30 sekund mała mysz zjada 1/30 kawałka, średnia mysz 1/15, a największa 1/10, czyli w sumie zjadają 1/30 + 1/15 + 1/10 = 1/5. Na zjedzenie całego kawałka sera będą zatem potrzebowały 5 razy po 30 sekund, czyli **2 minuty 30 sekund.**

Zadanie 8 (5 punktów) - Bez zakreślenia

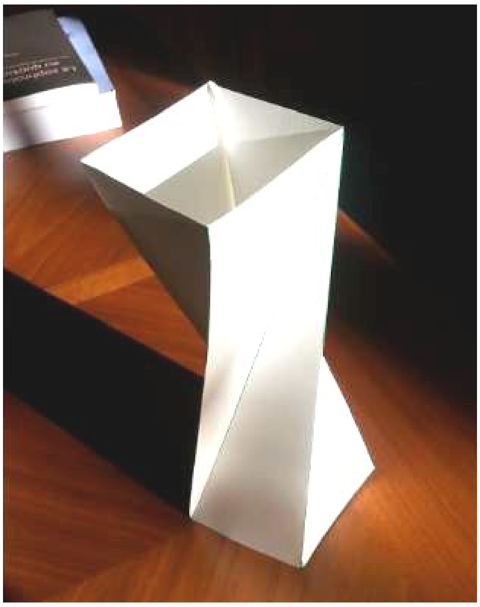
W przedziale liczb od 1 do 15 znajduje się 8 niezakreślonych liczb. Tyle samo liczb znajduje się w przedziale od 16 do 30 i w każdym kolejnym piętnastoliczbowym przedziale. W 134 przedziałach (134 przedziały, ponieważ 2014/15≈134) są 1072 liczby niezakreślone. W końcowym ciągu liczb {2011, 2012, 2013, 2014} są 3 liczby niezakreślone. **Od 1 do 2014 jest 1075 niezakreślonych liczb.**

Zadanie 9 (7 punktów) – Magiczne siódme pole

Jeśli a i b są dwiema pierwszymi liczbami, to liczbę z siódmego pola zapiszemy jako $5a+8b$. Suma dziesięciu wpisanych liczb wyniesie $55a+88b=11(5a+8b)$, będzie zatem jedenastokrotnością liczby z siódmego pola.

1	a
2	b
3	$a+b$
4	$a+2b$
5	$2a+3b$
6	$3a+5b$
7	$5a+8b$
8	$8a+13b$
9	$13a+21b$
10	$21a+34b$

Zadanie 10 (10 punktów) – Noga tańczy twista



Wykonanie :

zagięcia o długości 105 cm (w skali 1:5 - 21 cm) to krawędzie, a zagięcia po przekątnej - zagłębienia.

Obliczenie wysokości:

wierzchołki kwadratów położonego wyżej i położonego niżej wyznaczają wierzchołki bryły; złożenia krawędzi o długości 105 cm przebiegają przez przekątne ścian bocznych tej bryły.

$h^2= 105^2 - 35^2 = 11025 - 1225 = 9800$

$h = \sqrt{9800} = 70\sqrt{2} \approx 99$ cm

Wysokość rzeczywista nogi wynosi około 99 cm.

Zadanie specjalne dla 1. klas szkół ogólnokształcących i technikum

Zadanie 11 (5 punktów) – Zwykły bieg kolejki

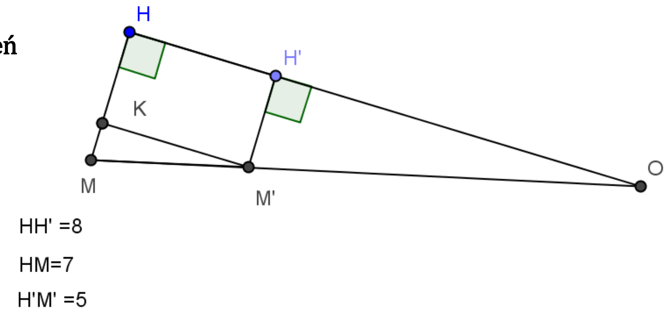
Każdy pasażer ma dwie jednakowo prawdopodobne możliwości. Istnieją zatem 32 jednakowo prawdopodobne możliwości. Obliczamy liczbę możliwości dla każdego z trzech zaproponowanych przypadków i otrzymujemy takie oto prawdopodobieństwa (w kolejności zgodnej z treścią zadania): **2/32, 10/32 i 20/32** (lub 1/16, 5/16 i 5/8).

Zadanie 12 (7 punktów) – Poznać choć jeden promień

Obliczamy odległość między dwoma punktami styczności

Okręgów na stole, które oznaczamy jako **M i M'**.

MM'= $\sqrt{8^2+(7-5)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$ cm.



Jeśli literą r oznaczymy promień opisany przez punkt styczności z małym okręgiem na stole, to r=OM'.
Jeśli literą R oznaczymy promień opisany przez punkt styczności z dużym okręgiem na stole, to R=OM.
Z twierdzenia Talesa dla trójkąta OMH wynika, że:

$\frac{r}{r+\sqrt{68}}=\frac{5}{7}$. A stąd $2r=5\sqrt{68}$; $\boldsymbol{r=5\sqrt{17}}$ **cm (*r*≈ 20,62 cm)**

$\boldsymbol{R=5\sqrt{17}+2\sqrt{17}=7\sqrt{17}}$ **cm (≈ 28,86 cm).**

Inne rozwiązanie tego zadania:

Niech R i r będą odpowiednio promieniami dużego i małego okręgu. Ustalamy, że OH'=p.
Otrzymujemy następujące równości
(twierdzenie Talesa dla trójkątów OMH i OM'H' oraz twierdzenie Pitagorasa w trójkącie OM'H'):

$\frac{R}{r}=\frac{7}{5}$; $\frac{R-r}{r}=\frac{8}{p}$; $r^2=p^2+5^2$. Wnioskujemy stąd, że $\frac{R}{r}-1=\frac{8}{5}$ oraz $\frac{8}{p}=\frac{2}{5}$ więc $p=20$.

$r^2=20^2+5^2$. A stąd $r=5\sqrt{17}$; $R=7\sqrt{17}$.

Promienie okręgów wynoszą w przybliżeniu 20,62 cm oraz 28,86 cm.

Zadanie 13 (10 punktów) – Uda się – nie uda się

Oto jedno z możliwych rozwiązań:

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkata OBC mamy otrzymujemy:

$R^2 = (R-5)^2 + 12^2$

Zatem $R = 16{,}9$ m;

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkata OFE mamy

$16{,}9^2 = 15{,}9^2 + FE^2$, stąd FE ≈ 5,73 m.

Ponieważ długość FE jest mniejsza niż 6 m,
to barka nie może przepłynąć.