

Zadanie 1 (7 punktów) : Bracia Daltonowie

Rozwiązanie zadania nie wymaga szczególnej wiedzy matematycznej. Wymaga jedynie właściwego wykorzystania wskazówek podanych w zadaniu.

Grat znajduje się w celi (0; B; III), Bill – w celi (1; A; I), natomiast Emmett – w celi (2; B; I)

Zadanie 2 (5 punktów) : Tylko dziewiątki!

Działanie, który należy zapisać:

$$2013 \times \underbrace{999 \dots 999}_{2013\text{-cyfr}} = 2013 \times (10^{2013} - 1) = 2013 \underbrace{3000 \dots 000}_{2013\text{-cyfr}} - 2013 = 2012 \underbrace{999 \dots 999}_{2009\text{-cyfr}} 7987.$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie sumę: $2+1+2+2009 \times 9+7+9+8+7=18117$.

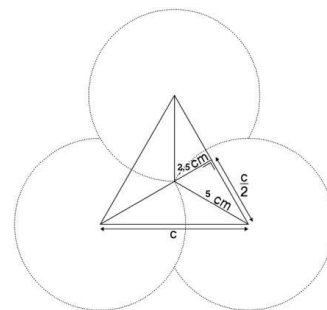
Można również spróbować, metodą prób, mnożyć kolejno 2013 przez 9; przez 99; przez 999; przez 9999 itd. Od tego momentu wszystkie odnalezione liczby rozpoczynają się od 2012 i kończą na 7987, a pomiędzy nimi następuje seria dziewiątek.

Zadanie 3 (7 punktów) : Geometria podstawek

W poszukiwanym położeniu środek ciężkości trójkąta równobocznego znajduje się w odległości 5 cm od wierzchołka lub 2,5 cm od podstawy. Wzorując się na rysunku obok oraz korzystając z twierdzenia Pitagorasa

otrzymujemy: $\frac{c}{2} = \sqrt{5^2 - (2,5)^2} = 2,5\sqrt{3}$, czyli $c = 5\sqrt{3}$ cm $\approx 8,66$ cm.

Istnieją również inne sposoby rozwiązania tego zadania – np. trygonometryczne.



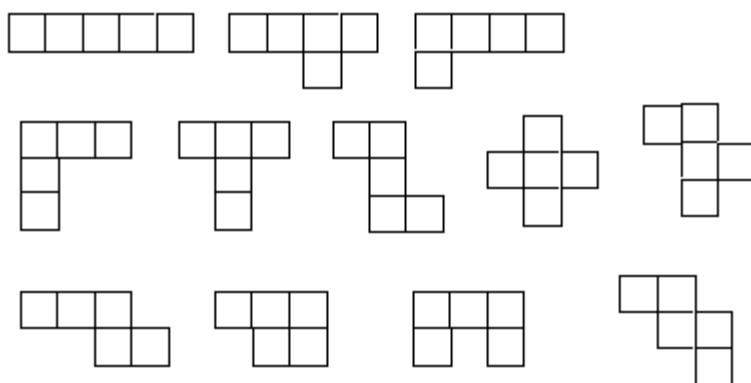
Zadanie 4 (5 punktów) : Oddalanie

Przy każdym ruchu palców przedstawiona odległość rzeczywista jest pomnożona przez 4. Ponieważ rozpoczynamy od 150 m, więc po sześciu ruchach mamy 614,4 km, a po siedmiu – 2457,6 km.

Należy zatem wykonać siedem ruchów.

Zadanie 5 (7 punktów) : Wyjątkowe zaproszenie

Oto dwanaście pantomin



1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Teraz już łatwo znajdziemy rozwiązanie stosując metodę prób i błędów.

Rozwiązań jest wiele. Obok przedstawiono dwa spośród nich.

Zadanie 6 (5 punktów) : Strona nieparzysta

Ponieważ jest 19 liczb nieparzystych od 1 do 37 oraz 33 liczby nieparzyste od 1 do 65, więc jest $19+33-1=51$ domów po nieparzystej stronie ulicy. Możemy również wziąć pod uwagę fakt, iż n -ty dom ma numer $2n-1$.

Zadanie 7 (7 punktów) Zagubiony kwadrat

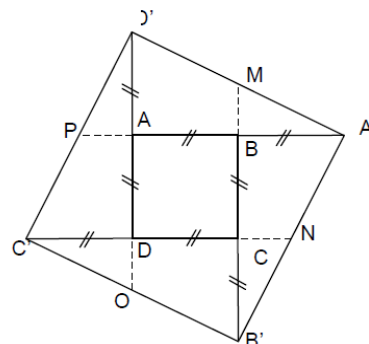
Można zacząć od rysunku pomocniczego, który pomoże przeanalizować sytuację podaną w zadaniu.

Następnie rysujemy kwadrat $A'B'C'D'$ o boku 15 cm (rysunek).

Korzystając np. z podobieństwa trójkątów wykazujemy, że M, N, O i P są odpowiednio środkami odcinków $D'A', A'B', B'C'$ i $C'D'$.

Następnie rysujemy $D'O, B'M, A'P$ i $C'N$.

Punkty przecięcia podanych odcinków utworzyły kwadrat $ABCD$.

**Zadanie 8 (5 punktów) Wspólne przejazdy**

Niech x będzie liczbą samochodów z 3 lub 4 osobami, a y liczbą samochodów z 1 lub 2 osobami.

Liczbę samochodów przedstawiamy jako: $2x + 2y$.

Liczbę osób przedstawiamy jako: $3x + 4x + 2y + y = 7x + 3y = 100$.

Rysujemy tabelę (pamiętając, że x i y są liczbami całkowitymi):

	x	1	4	7	10	10
	y	31	24	17	10	3
Liczba samochodów	$2x+2y$	64	56	48	40	32
Liczba osób	$7x+3y$	100	100	100	100	100

Zauważamy, że jest pięć rozwiązań tego zadania, tzn. liczba samochodów, które wjechały na parking może wynosić: **64, 56, 48, 40, 32**.

Zastosowanie równań nie jest konieczne do rozwiązania tego zadania. Metoda prób i błędów może również prowadzić do rozwiązania.

Zadanie 9 (7 punktów) : Algebra kul

Istnieje wiele metod rozwiązania tego zadania.

Można np. rozłożyć liczby widoczne na kulach na czynniki i przeprowadzić analizę. Dobrym pomysłem będzie umieszczenie 5 w kuli 96, która jako jedyna jest połączona z trzema wielokrotnościami 5, tzn. 20; 15 i 60. Podobnie 7 znajduje się w kuli 12, która jako jedyna jest połączona z trzema wielokrotnościami 7: 84, 112 i 336. Kontynuujemy rozwiązywanie zadania metodą dedukcji.

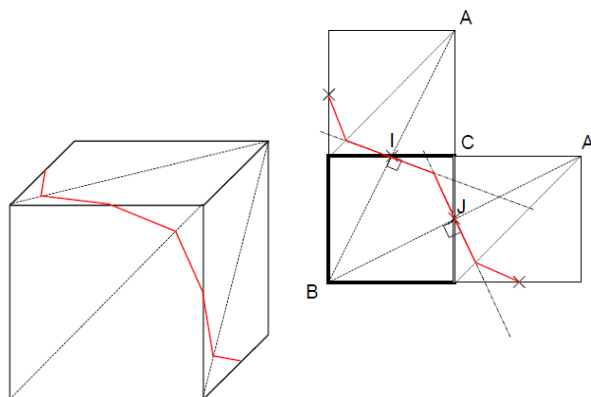
Rozwiązanie to (w nawiasach podano liczby umieszczone w poszczególnych kulach):

12(7), 84(3), 60(6), 336(4), 112(1), 15(2), 96(5), 20(8).

Zadanie 10 (10 punktów) : Sprytny łagodny podział

Z łatwością można odnaleźć na przedniej ścianie punkty znajdujące się w takiej samej odległości od A i B . Są to punkty symetralnej odcinka AB , znajdujące się powyżej przekątnej BC oraz punkty symetralnej odcinka $A'B$, znajdujące się pod przekątną BC . (rysunek obok).

W ten sam sposób można skonstruować linię graniczną na dwóch pozostałych ścianach rozwinięcia. Na planecie przedstawionej w perspektywie otrzymamy: (rysunek obok).



Zadanie specjalne dla 1. klas szkół ogólnokształcących i technikum**Zadanie 11. (5 punktów) : Pomieszanie kolorów**

Istnieje wiele metod rozwiązania tego zadania – za pomocą drzewka, tabeli ...

Dla 4 zakrętek jest $4! = 24$ możliwości.

Prawdopodobieństwo, że każda nakrywka znajdzie się na odpowiednim pisaku wynosi $1/24$.

Prawdopodobieństwo, że żadna nakrywka nie znajdzie się na odpowiednim pisaku (wszystkich takich możliwości jest 9) wynosi $9/24 = 3/8$.

Zadanie 12. (7 punktów) : Tylko Chaplin

Punktem wyjścia jest 100 uczniów.

Jeśli 71 uczniów lubi film A, a 76 film B, to jest co najmniej $71+76-100=47$ uczniów, którzy lubią A i B. Skoro 63 uczniów lubi film C, to jest co najmniej $47+63-100=10$ uczniów, którzy lubią wszystkie trzy filmy.

Minimalny procent uczniów, którym spodobały się wszystkie trzy filmy to 10%.

Jest również możliwe, że wszyscy ci, którym spodobał się film C, polubili też film A oraz, że wszyscy ci, którym spodobał się A, polubili też B. W konsekwencji, 63 uczniów, którym podoba się C, lubią też A i B.

Maksymalny procent uczniów, którym spodobały się wszystkie trzy filmy wynosi 63%.

Zadanie dla 1. klas ogólnych i technicznych**Zadanie 13 (10 punktów) : Co za spodek**

Niech B będzie wierzchołkiem, będącym środkiem odcinka łączącego spodek H jednej z wysokości ze środkiem I boku BC . Punkty H , B , I i C leżą na jednej prostej. Punkt H jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A względnej prostej BC .

Wierzchołek A jest punktem przecięcia tej wysokości z okręgiem o środku B i promieniu BC . Otrzymujemy trójkąt równoramienny o ramionach BA i BC .

Ponieważ $|HB| = |BI| = |IC| = a$, więc $|AB| = |BC| = 2a$.

Stosując twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AHB

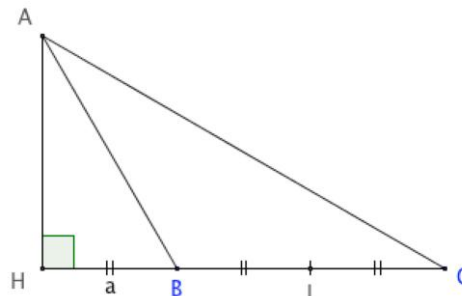
otrzymujemy: $|AH| = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$, natomiast w

trójkącie AHC mamy $|AH| = \sqrt{(3a)^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a\sqrt{3}$.

Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{a\sqrt{3} \times 2a}{2} = 10000 \text{ mm}^2$. Stąd

$$a = \sqrt{\frac{10000}{\sqrt{3}}} \text{ mm.}$$

Ostatecznie $|AB| \approx 152 \text{ mm}$ i $|BC| \approx 263 \text{ mm}$.

**Zadanie dla 1. klas zawodowych****Zadanie 13 (10 punktów) : Żetony Julii**

Istnieje wiele metod rozwiązania tego zadania: za pomocą arkusza kalkulacyjnego lub sukcesywnego dodawania...

Największy trójkąt składa się z 1953 żetonów, a jego bok z 62

