

Zadanie 1 (7 punktów)

Chronometr

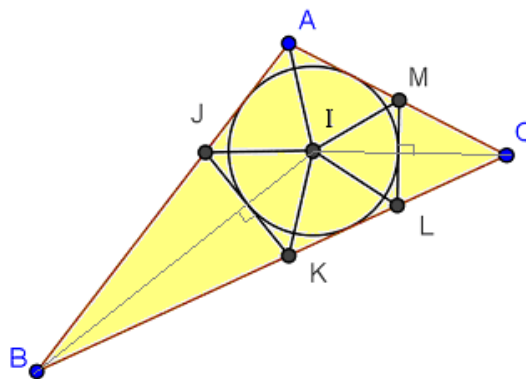
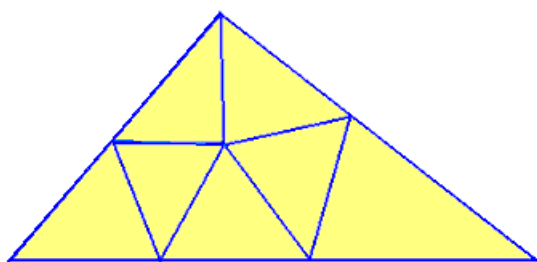


Strażnik zamku zapala od razu trzy świece. Godzinę później mała świeczka gaśnie. Gasi więc średnią, w której pozostaje wosku na dwie godziny. Kiedy gaśnie świeczka czterogodzinna, zapala świeczkę średnią, którą zgaślił wcześniej – pozostało w niej wosku na 2 godziny. Gdy zgaśnie i ta świeczka, strażnik idzie otworzyć drzwi. Mamy zatem $4 + (3 - 1) = 6$.

Zadanie 2 (5 punktów)

Ostrokątny podział

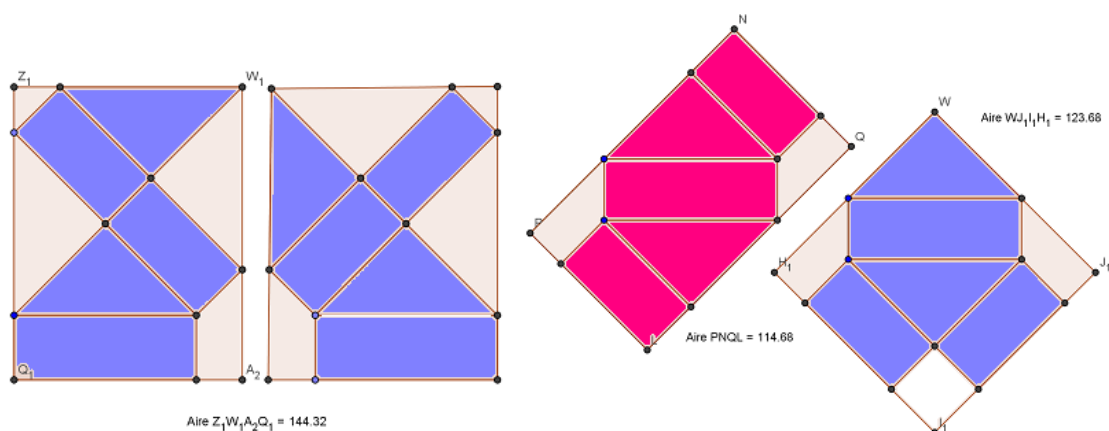
Na rysunku przedstawiono przykładowy trójkąt rozwartokątny podzielony na 7 trójkątów ostrokątnych :



Zadanie 3 (7 punktów)

Ekonomiczna siatka

Oto kilka przykładów siatek graniastostupa umieszczonych w prostokątach.

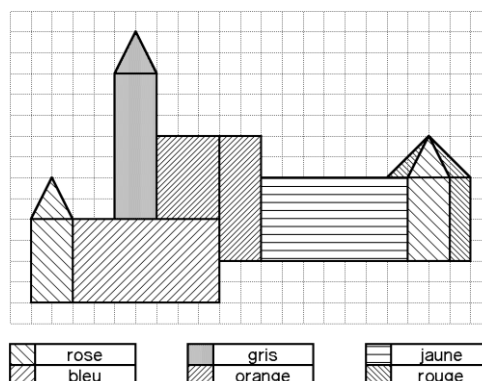


Najbardziej „ekonomiczne” umieszczenie jest na rysunku trzecim (od lewej). Aby porównać pola nie trzeba stosować obliczeń, można porównać te powierzchnie prostokąta, których nie pokrywa siatka graniastostupa.

Zadanie 4 (5 punktów)

Zabytkowy zamek

Na rysunku przedstawiony jest widok zamku od strony północnej.



Zadanie 5 (7 punktów)**Bezcenna bajka**

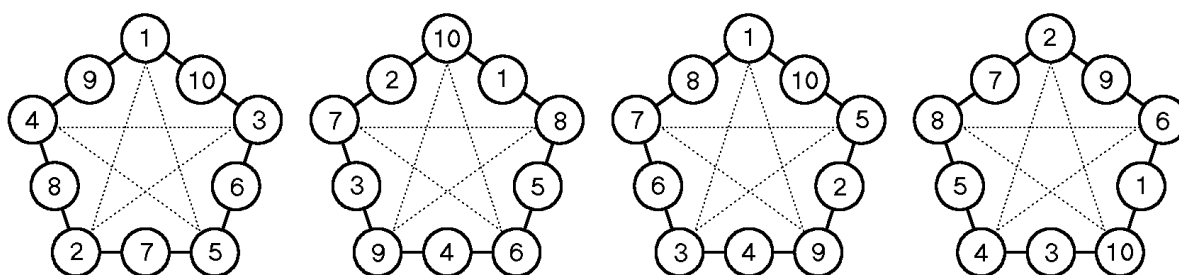
Oto lista kwot do 30 €, które można zapłacić bez wydawania reszty.

Kwota	5	7	10	12	14	15	17	19	20	21	22	24	25	26	27	28	29	30
Forma zapłaty	5	7	5+5	5+7	2×7	3×5	10+7	12+7	4×5	3×5	17+5	19+5	5×5	19+7	22+5	4×7	22+7	6×5

Ponieważ od 26 do 30 mamy pięć kolejnych liczb – kwot, które można zapłacić bez wydawania reszty, więc dla każdej kwoty większej od 30 można znaleźć sposób zapłaty, polegający na dodaniu wielokrotności 5 do jednej z nich.

Zadanie 6 (5 punktów)**Magiczny pięciokąt**

Na rysunkach podano cztery różne rozwiązania, z których każde może mieć 10 wariantów po zastosowaniu symetrii lub obrotu.

**Zadanie 7 (7 punktów)****Dwie cyfry a trzy kąty**

Istnieje pięć takich trójkątów równoramiennych o kątach: $48+48+84$; $81+81+18$; $86+86+8$; $88+88+4$; $60+60+60$ (trójkąt równoboczny).

Zadanie 8 (5 punktów)**O jedną trójkę za dużo**

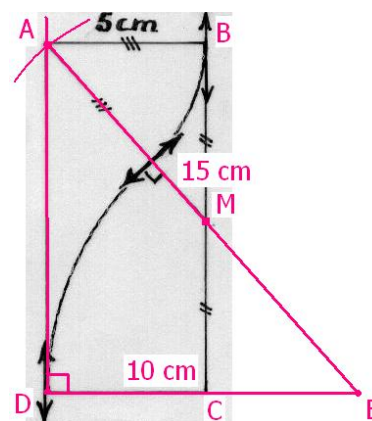
Niech n będzie liczbą legionistów w tej kohorcie. Ponieważ przy każdej próbie centuriona pozostaje ich trzech w niepełnym rzędzie, więc $n-3$ jest wielokrotnością 4, 5 i 7. Najmniejszą wspólną wielokrotnością tych liczb jest 140 (wiemy, że jest ich mniej niż 200), więc $n = 143$. Ponieważ mają być co najmniej dwa rzędy, więc otrzymujemy $143 = 11 \times 13$.

Zadanie 9 (7 punktów)**Niedaleko pada jabłko od jabłoni**

Otrzymujemy ciąg Fibonacciego prostokątów o wymiarach (w milimetrach): 2×3 ; 3×5 ; 5×8 ; 8×13 itd. Po 13 dniach mamy prostokąt $987 \text{ mm} \times 1597 \text{ mm}$, którego pole przekracza $1,5 \text{ m}^2$.

Zadanie 10 (10 punktów)**Krzywa lutnika**

Przedstawiona na rysunku krzywa BD jest złożona z łuków dwóch okręgów. Można zauważyć, że mniejszy okrąg ma środek w punkcie A i promień długości 5 cm , natomiast większy okrąg ma środek w punkcie E i promień długości DE . Ponieważ M jest środkiem boku BC , więc (z twierdzenia Talesa lub własności symetrii środkowej) mamy $AB = CE = 5 \text{ cm}$. Wynika stąd, że promień większego łuku wynosi $5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$. Możemy więc zbudować trójkąt prostokątny ADE o kącie prostym w wierzchołku D taki, że $DE = 10 \text{ cm}$ i $EA = 15 \text{ cm}$, a następnie narysować prostokąt $ABCD$ oraz łuki obu okręgów.



Zadania dodatkowe dla klasy pierwszej szkoły ponadgimnazjalnej

Zadanie 11 (5 punktów)

Ten numer ma Lea



Jeśli Lea ma dwie szanse na trzy, że jej zeszyt zostanie zebrany, to otrzymała od nauczyciela numer będący wielokrotnością dokładnie czterech z sześciu liczb na kostce: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Można sprawdzić, że wśród liczb od 1 do 27 jedynymi, które mają tę własność są: 6, 18 i 20.

Zadanie 12 (7 punktów)

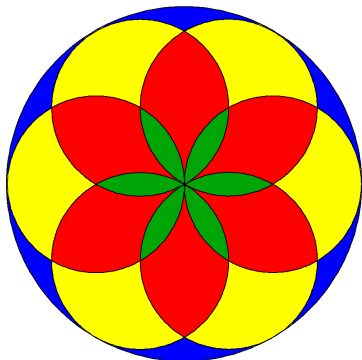
Harmonijny podział

Na początku należy zauważyć, że czas korzystania z każdej z baterii przez Haralda i Matyldę musi być taki sam (oznaczymy go przez n). Można więc przyjąć, że poszukujemy czasu, w którym korzystaliby wspólnie z jednej baterii. Wówczas w ciągu jednej godziny na słuchanie muzyki wykorzystywana jest $1/12$ baterii, na grę wideo $1/4$ baterii, natomiast „gdyby korzystali wspólnie z jednej baterii” wykorzystaliby $1/n$ baterii. Stąd mamy równanie $1/12 + 1/4 = 1/n$. Po obliczeniach $n = 3$.

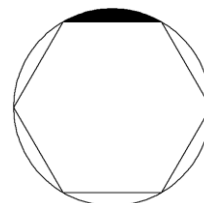
Zamiany dokonają w południe, po trzech godzinach używania. Każde z nich będzie mogło wykorzystać 6 godzin na gry wideo lub słuchanie muzyki.

Zadanie 13 (10 punktów)

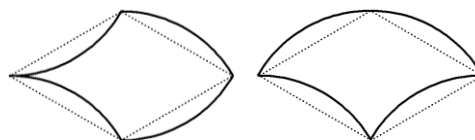
W czterech kolorach



Każda kolorowa część (zielona, czerwona, żółta i niebieska) składa się z sześciu mniejszych identycznych powierzchni. Można więc porównywać te mniejsze powierzchnie.



Każdy płatek powierzchni zielonej składa się z dwóch odcinków koła (oznaczymy pole takiego odcinka przez Z). Odcinek ten jest zaznaczony również kolorem czarnym na rysunku przedstawiającym sześciokąt wpisany w koło. Jeśli uzupełnimy element niebieski (o polu N) dwoma zielonymi odcinkami koła, to otrzymamy powiększenie odcinka czarnego. Skala wynosi 2:1, więc pole złożone z elementu niebieskiego i dwóch zielonych odcinków jest 4 razy większe od pola czarnego (równego polu Z). Stąd $N + Z + Z = 4Z$, czyli $N = 2Z$, gdzie N to pole pojedynczego elementu niebieskiego, a $2Z$ to pole płatka zielonego. Zatem elementy niebieski i zielony mają równe pola.



Na podstawie przedstawionych rysunków rombów (o kątach 60° i 120°) z pojedynczymi elementami, które mają kolor czerwony i żółty można wywnioskować, że mają one równe pola. Są oczywiście większe od pola elementu zielonego.

Ostatecznie: niebieski = zielony < czerwony = żółty.

