

Zadanie 1: Bez wątpienia (7 punktów)

Rok ma 365 lub 366 dni. W najgorszym wypadku może być 366 dni różnych urodzin, ale jeśli w miasteczku Nicole jest ponad 400 mieszkańców, możemy być pewni, że dwie osoby mają urodziny tego samego dnia.

Dla 4 cyfr mamy 10^4 możliwości ułożenia kodu PIN. Dla 10 milionów telefonów jest ich więc co najmniej $10^7/10^4$, czyli 10^3 właścicieli telefonów używa tego samego kodu. Skoro jest ich ponad 366, znajdziemy pośród nich na pewno co najmniej dwóch, którzy obchodzą urodziny tego samego dnia.

Proponowana skala : jakość redakcji tekstu – **3 punkty**. Tok myślenia, wyjaśnienia – **4 punkty**, w tym **1 punkt** za pierwsze dowodzenie.

Cele i kompetencje: logika, wyobraźnia, obliczenia, redagowanie tekstu w języku obcym.

Zadanie 2: We wszystkich kierunkach (5 punktów)

Największa liczba pięciocyfrowa to 99999. Jej pierwiastek kwadratowy wynosi około 316,22. To ogranicza poszukiwania do palindromów trzycyfrowych mniejszych od 316. Obliczamy 313^2 , 303^2 , 292^2 , które nie są palindromami, aż dochodzimy do rozwiązania $212^2 = 44944$. Kolejne mniejsze rozwiązania to: $202^2=40804$, $121^2=14641$, $111^2=12321$, $101^2=10201$.

Proponowana skala : za każdy znaleziony prawidłowo palindrom przyznajemy **1 punkt**.

Cele i kompetencje : obliczenia na liczbach całkowitych, ograniczenie obszaru rozwiązań.

Zadanie 3: Zważymy (7 punktów)

Odpowiednie odważniki to: 1, 3 i 9, ponieważ: $1=1$, $2=3-1$, $3=3$, $4=3+1$, $5=9-3-1$, $6=9-3$, $7=9-3+1$, $8=9-1$, $9=9$, $10=9+1$, $11=9+3-1$, $12=9+3$, $13=9+3+1$.

Proponowana skala : 3 punkty za wyznaczenie wartości odważników; 2 punkty za szczegóły 13 pomiarów (bez względu na sposób przedstawienia; ważne, żeby rozróżnić pomiary). Można przyznać do 2 punktów, jeśli podano kilka prawidłowych pomiarów, lecz pochodzący one z innej trójki niż (1,3,9).

Cele i kompetencje : działania na liczbach całkowitych, zastosowanie metody prób i błędów.

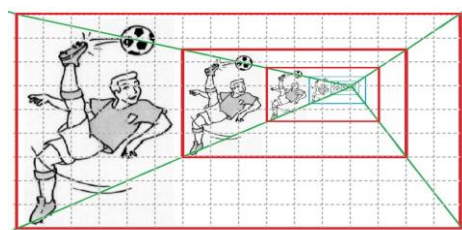
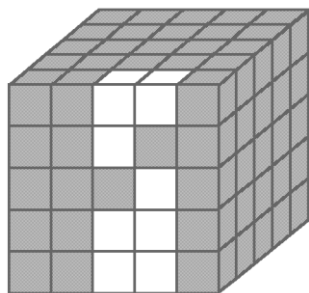
Zadanie 4: W okienku (5 punktów)

Mamy do czynienia z dwukrotnym pomniejszeniem, czyli skalą $\frac{1}{2}$. Wymagane są jedynie rysunki trzech pierwszych prostokątów. Jeśli ich względne pozycje będą prawidłowe, to narysowane proste będą zbieżne.

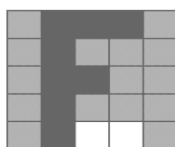
Uwaga. Tak, jak zaznaczono w zadaniu, nie oceniamy, jakości, ani nawet obecności rysunku piłkarzy.

Proponowana skala : 2 punkty za rysunek trzech prostokątów o prawidłowych wymiarach (16×9 ; $8 \times 4,5$; $4 \times 2,25$); 3 punkty za prawidłowe umieszczenie prostokątów, których położenie można łatwo sprawdzić poprzez umieszczenie odpowiednich prostych lub sprawdzając umieszczenie niższego prawego rogu drugiego prostokąta na $\frac{1}{3}$ wysokości, $\frac{1}{8}$ szerokości; jeśli jednak przy rysowaniu trzech ekranów doszło do pomylenia prawych górnych rogów, nie przyznajemy żadnego z trzech punktów.

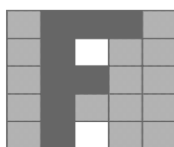
Cele i kompetencje : precyzyjny pomiar rysunku; staranny i precyzyjny rysunek; użycie skali.

**Zadanie 5: Naszpikowany sześciianami (7 punktów)**

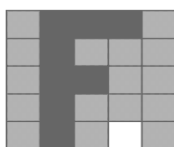
Oto sześcian po usunięciu jednej warstwy ze wszystkich ścian.



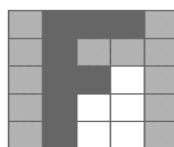
WARSTWA 1



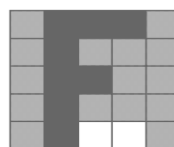
WARSTWA 2



WARSTWA 3



WARSTWA 4



WARSTWA 5

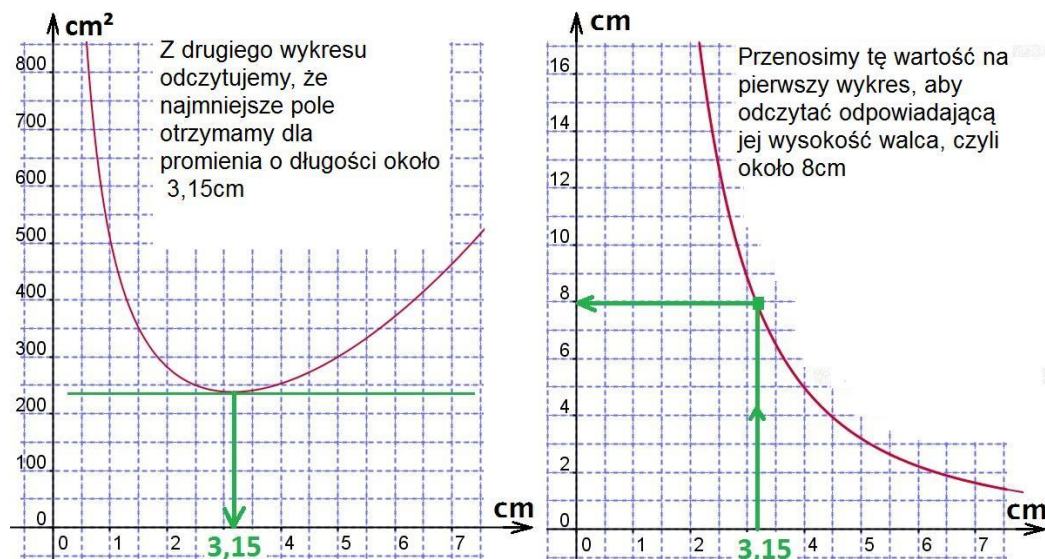
Można liczyć białe sześciiany piętrami: jest ich w sumie 12.

Oczywiście można również liczyć warstwy pionowo, z przodu lub z boku.

Proponowana skala: 4 p. za rysunek nowego sześcianu w perspektywie (kara w wysokości 1 p. za każdą nieprawidłową ściankę nowego sześcianu) oraz 3 p. za odliczenie białych sześcianów. W przypadku błędu (wynik inny niż 12) można przyznać 1 lub 2 punkty, jeśli przedstawiony sposób liczenia jest prawidłowy.

Cele i kompetencje: uważne czytanie treści zadania, wyobraźnia przestrzenna, staranny rysunek.

Zadanie 6: Jak najdokładniej (5 punktów)



Wymiary etykiety to około 8 cm × 19 cm (jej długość jest równa $2\pi r$).

Proponowana skala: 2 punkty za znalezienie wartości promienia; 1 punkt za wartość przybliżoną wysokości zgodną z podaną wartością promienia; 2 punkty za rysunek etykiety zgodny ze znaną wartością wysokości, której drugi wymiar jest w przybliżeniu równy $2\pi r$.

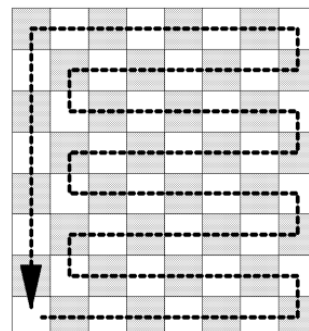
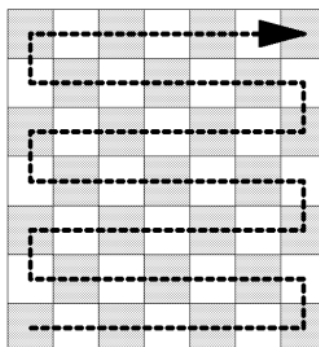
Cele i kompetencje: szukanie informacji z reprezentacji graficznej funkcji (współrzędne, minimum); rozwinięcie powierzchni bocznej walca.

Zadanie 7: Wracasz na start (7 punktów)

Oto bezowocna próba dla kwadratu 7×7 oraz prawidłowa droga dla kwadratu 8×8 . Po tego rodzaju próbach domyślamy się, że trasa może zostać wyznaczona wtedy i tylko wtedy, gdy liczba pól szachownicy jest parzysta.

Demonstracja niewykonawalności dla liczb nieparzystych:

Liczba kroków do wykonania to liczba pól szachownicy. Z każdym krokiem zmieniamy kolor. W konsekwencji, jeśli zrobimy nieparzystą liczbę kroków, znajdziemy się na polu, który nie jest koloru pola startowego a1, nie będzie więc możliwości, żeby na nie powrócić.



Lub: Aby powrócić na a1, należy wykonać tyle samo ruchów w lewo, ile zrobiono w prawo oraz tyle samo w dół, co w górę. Wykonujemy, więc parzystą liczbę kroków. Jeśli liczba pól jest nieparzysta, nie możemy przejść przez nie wszystkie.

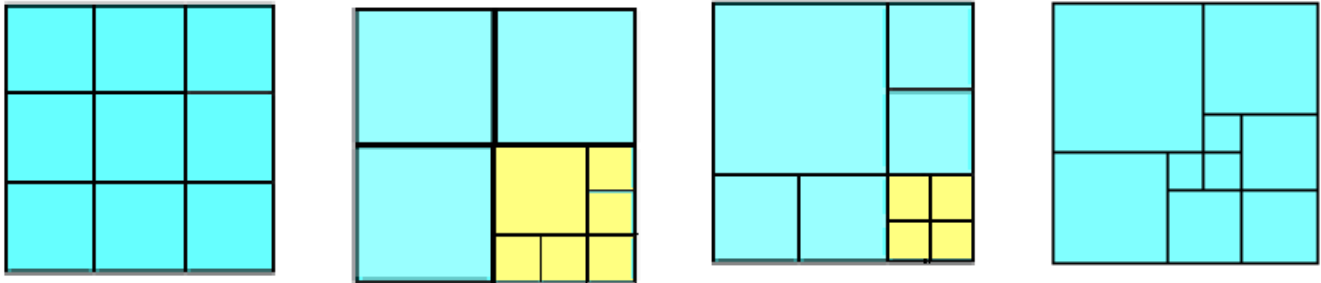
Proponowana skala : 2 punkty za prawidłową trasę na szachownicy 8×8 ; 1 punkt za stwierdzenie, że nie istnieje taka trasa na szachownicy 17×17 ; 4 punkty za prawidłowy dowód nieistnienia takiej trasy. Można przyznać 2 punkty za stwierdzenie „17 jest liczbą nieparzystą”. Można przyznać 2 punkty za ciekawą prezentację przeprowadzonych prób.

Cele i kompetencje: logika, intuicja, wytrwałość, zastosowanie parzystości.

Oto cztery rozwiązania tego zadania. Wydaje się, że inne rozwiązania nie istnieją.

Zadanie 8 : Cztery razy dziewięć (5 punktów)

Oto cztery rozwiązania tego zadania. Wydaje się, że inne rozwiązania nie istnieją.



Podziały kwadratów na inne kwadraty były obiektem badań w XX i XXI wieku: <http://www.squaring.net/>

Proponowana skala: 5 p. za cztery różne podziały; jeśli wskazano mniej niż cztery podziały, to przyznajemy po 1 p. za każdy.

Cele i kompetencje: wyobraźnia, intuicja, dobra percepcja geometryczna, wytrwałość.

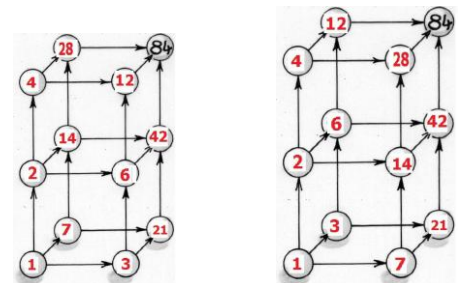
Zadanie 9 : Trasa wytoczona strzałkami (7 punktów)

84 ma dokładnie 12 dzielników. W tym zadaniu chodzi o ich odpowiednie umieszczenie w kulkach.

Istnieją dwa symetryczne rozwiązania: $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

Proponowana skala: 7 punktów za jedną z dwóch prawidłowych odpowiedzi (nie wymaga się objaśnień). Jeśli nie podano żadnego rozwiązania, można przyznać maksymalnie 3 punkty za niedokończoną trasę, zgodnie z ograniczeniami narzuconymi przez strzałki.

Cele i kompetencje: rozkład liczby całkowitej, dzielnik i wielokrotność.



Zadanie 10 : Czterech na jednego (10 punktów)

Oto otrzymane puzzle ułożone w odpowiedni sposób:

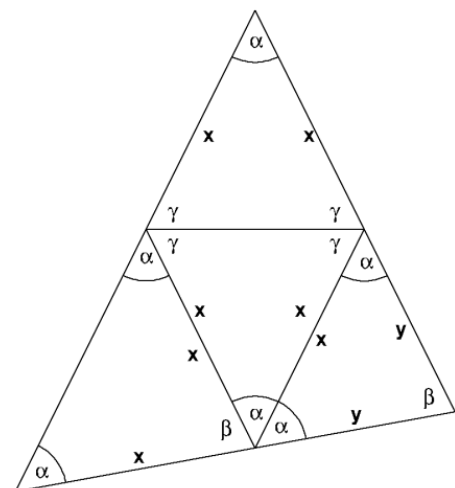
Ponieważ $\beta = 180 - 2\alpha$ i $\gamma = 90 - \alpha/2$, więc każdy z kątów, w którym schodzą się trzy trójkąty musi być półpełny. Stąd otrzymana figura jest trójkątem. Jest on równoramienny, ponieważ ma dwa równe kąty α (alternatywnie: dwa równe boki $x + y$).

Proponowana skala: 6 punktów za prawidłowe ułożenie trójkąta równoramiennego;

4 punkty za objaśnienia (3 punkty za uzasadnienie, że mamy do czynienia z trójkątem oraz 1 punkt za uzasadnienie, że jest on równoramienny).

Przyznajemy tylko 1 punkt z 6 za wybór α równego 60 stopni; maksymalnie 3 punkty z 6 za wybór α równego 45 stopni; można przyznać 6 punktów za wybór α równego 30 stopni.

Cele i kompetencje: precyzyjny i dokładny rysunek, uważna lektura treści zadania, dobra analiza figury, własności kątów w trójkącie.



**Zadania dodatkowe
dla pierwszej klasy szkoły ponadgimnazjalne**

Zadanie 11 : Wartościowe gwoździe (5 punktów)

Niech n będzie sumą wszystkich odstępów (lub gwoździ), a p liczbą odstępów w części białej.

Mamy zatem: $\frac{p+1}{n} = \frac{1}{3}$ oraz $\frac{p-1}{n} = \frac{3}{10}$. Stąd wynika, że $p=19$, a $n=60$.

$$P(\text{Czarne}) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{19}{60} - \frac{1}{3} = \frac{1}{20}.$$

Proponowana punktacja: 2 punkty za prawidłową odpowiedź, 3 punkty za ułożenie równań i prawidłowe ich rozwiązanie także wówczas, gdy prawdopodobieństwo zostało błędnie przypisane (liczba gwoździ zamiast liczby części); Przyznajemy 2 punkty, jeśli dostarczone objaśnienie polega na ustaleniu arbitralnie liczby gwoździ – lub odstępów – na przykład na 50 i dedukowaniu na tej podstawie.

Cele i kompetencje: podstawowe pojęcia prawdopodobieństwa, równość stosunków.

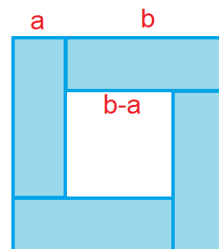
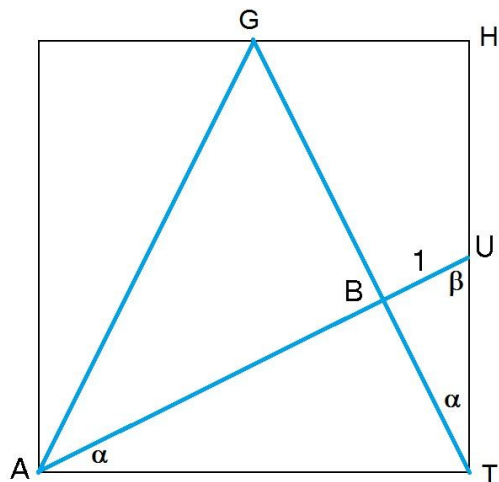
Zadanie 12 : Części harmonijki (7 punktów)

Niech a i b będą szerokością i długością złączonych prostokątów. Wtedy duży kwadrat ma bok o długości $a + b$, zaś mały $b - a$. Ponieważ stosunek pól wynosi 4, więc stosunek boków wynosi 2. Stąd $a + b = 2(b - a)$. A zatem $b = 3a$. W ten sposób otrzymujemy wymiary kartki: **4a i 3a** (lub też $12a$ i a , lecz zadanie sugeruje raczej pierwsze rozwiązanie).

Można również rozwiązać równanie $(a + b)^2 = 4(b - a)^2$ przez rozwinięcie, co doprowadziłoby do dość zawiłych równań drugiego stopnia.

Proponowana skala: 3 punkty za prawidłową ramkę, przyklejoną na karcie odpowiedzi (ramka zbudowana z czterech identycznych prostokątów, w których stosunek boków wynosi $1/3$); 4 punkty za prawidłowe objaśnienie prowadzące do określenia stosunku boków prostokąta ($3/4$ lub $1/12$). Nie oczekuje się podania obu rozwiązań.

Cele i kompetencje: przedstawienie sytuacji; obliczenia pisemne; powiązanie między stosunkiem pól i stosunkiem.

**Zadanie 13 : Z końca w koniec (10 punktów)**

Można przeprowadzić obliczenia na wiele sposobów.

Na przykład za pomocą kątów:

Trójkąty TAU , HTG i FAG są podobne, więc kąty TAU i GTH są równe (wynoszą α).

Ponieważ kąt β jest wspólny dla trójkątów ATU i UTB , więc trójkąty te są podobne.

$$\text{Stąd } \frac{UT}{AT} = \frac{1}{2} = \frac{BU}{BT} = \frac{BT}{AB}.$$

Skoro $BU=1\text{cm}$, więc $BT=2\text{cm}$ i w rezultacie $AB=4\text{cm}$.

AU wynosi, więc 5cm .

Ponieważ długości odcinków AU , GT i AG są równe, więc długość łamanej wynosi 15cm .

Można również dokonać obliczeń z twierdzenia Pitagorasa.

Proponowana punktacja: 3 punkty za prawidłową odpowiedź; 7 punktów za objaśnienia (do podziału w zależności od jakości objaśnień).

Cele i kompetencje: analiza figury geometrycznej, zastosowanie proporcji, dowodzenie.

Zespół opracowujący zadania dla Matematyki Bez Granic