Zadanie 1 (7 punktów) – Wielokąty Antygony

Jeśli ***n*** jest liczbą boków wielokąta, a **d** liczbą jego przekątnych, otrzymujemy:

n=6, d=9; n=7, d=14; n=8, d=20.

Dla wielokąta o ***n*** wierzchołkach, z każdego wierzchołka można wyznaczyć **n – 3** przekątne. Ponieważ każda przekątna zawiera dwa wierzchołki, otrzymujemy **n·(n–3)/2** przekątnych. Metodą prób można obliczyć, że wielokąt o **15** wierzchołkach ma **90** przekątnych, a wielokąt o **16** wierzchołkach ma **104** przekątne. Nie może zatem istnieć wielokąt o stu przekątnych.

Zadanie 2 (5 punktów) – Zaprogramowane ubywanie

Dla **77** otrzymujemy najdłuższy ciąg: **77, 49, 36, 18, 8.**

Zadanie 3 (7 punktów) – Przejażdżka na osiach

Podczas jednego okrążenia, koła przemieszczają się o 50·π cm, a deska na osiach o 10·π cm. W stosunku do powierzchni ziemi, deska przemieszcza się o (50·π + 10·π) = **60·π cm**, czyli **około 188,5 cm**

Zadanie 4 (5 punktów) – Czwórbój

Rozwiązanie można zilustrować za pomocą tabelki. Przykładowe tabelki poniżej. A–B–C–D–E–F–G–H oznaczają nazwy drużyn:

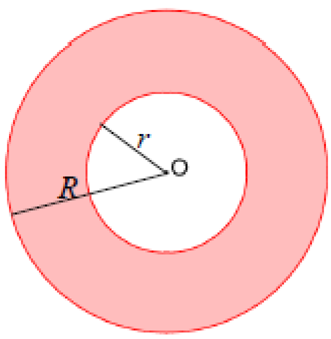
	Siatkówka	Piłka nożna	Piłka ręczna	Rugby
1	A-B	A-C	A-D	A-E
2	C-D	E-G	C-E	C-F
3	E-F	F-B	F-H	B-H
4	G-H	D-H	B-G	D-G

Tabela 1.

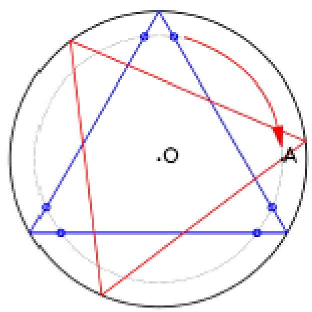
	E	**F**	**G**	**H**
A	**Siatkówka**	**Piłka nożna**	**Piłka ręczna**	**Rugby**
B	**Rugby**	**Siatkówka**	**Piłka nożna**	**Piłka ręczna**
C	**Piłka ręczna**	**Rugby**	**Siatkówka**	**Piłka nożna**
D	**Piłka nożna**	**Piłka ręczna**	**Rugby**	**Siatkówka**

Tabela 2.

Zadanie 5 (7 punktów) – Okrążony



Na początku konstruujemy dowolny trójkąt równobocznego wpisany w okrąg o promieniu 6 cm (na rysunku zaznaczony kolorem niebieskim). Następnie rysujemy okrąg o środku O i promieniu OA. Przecina on niebieski trójkąt w sześciu punktach. Teraz wystarczy obrócić niebieski trójkąt wokół O w ten sposób, aby którykolwiek z sześciu punktów przeszedł na A.



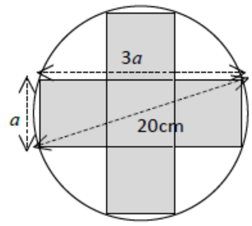
Konstrukcja jest możliwa do wykonania, gdy **punkt A leży w pierścieniu o środku O ograniczonym okręgami o promieniach r=3 cm i R=6 cm.**

Mathématiques SANS Frontières

Zadanie 6 (5 punktów) – Klub pięciu

Zadanie może być rozwiązane w różnoraki sposób: za pomocą równania lub wykresu.
Jeśli ***x*** jest czasem, którego potrzebuje na przebiegnięcie Ahmed, to całkowity czas biegu Będzie wynosił $5\cdot x+50$ (min). Ponieważ Ahmed biegnie dwa razy szybciej niż Eliza, więc $x+20=2\cdot x$. Całkowity czas wynosi **150 minut**, czyli **2 godz. 30 min**.

Zadanie 7 (7 punktów) – Smart Box



Rozwiązanie wynika z twierdzenia Pitagorasa (rysunek).

Wtedy $a=\sqrt{40}$, zaś objętość pudełka wynosi $a^3 \approx \sqrt{253}cm^3$

Zadanie 8 (5 punktów) - Szczęśliwe wyprzedzenie

Gdy pierwszy zawodnik przybywa na szczyt, drugiego zawodnika dzieli od szczytu jeszcze 200 metrów. Jadąc z prędkością 18 km/h, potrzebuje 40 s.
W trakcie zjazdu pierwszy zawodnik ma zatem czterdziestosekundową przewagę.
Jeśli obaj zawodnicy po przekroczeniu szczytu wzniesienia potrzebują tyle samo czasu i tej samej drogi, żeby osiągnąć stałą prędkość 70 km/h, to na koniec będzie ich dzieliła odległość

$$70\cdot\frac{40}{3600}km \approx 0{,}778km = 778m$$

Zadanie 9 (7 punktów) – Geolokalizacja

Szukamy kąta α odpowiadającego długości łuku 0,1 km, dla promienia Ziemi o długości 6367 km.

$0{,}1\cdot = \frac{2\pi r}{360}\cdot\alpha$, stąd $\alpha \approx 0{,}0009^\circ$. GPS wskazuje szerokość geograficzną północną o wartości 48,7281°–0,0009° = **48,7272°**.

Zadanie 10 (10 punktów) – Teoria cięciw

Dla kwadratu mamy dwa odcinki o długości $\sqrt{2}$ i jeden odcinek o długości 2. **Iloczyn wynosi 4.**
Dla sześciokąta mamy dwa odcinki o długości 1, dwa odcinki o długości $\sqrt{3}$ i jeden o długości 2. **Iloczyn wynosi 6.**
Dla trójkąta równobocznego mamy dwa odcinki o długości $\sqrt{3}$. **Iloczyn wynosi 3.**
Hipoteza: **W *n*-kącie foremnym wpisanym w okrąg o promieniu 1, iloczyn długości odcinków łączących ustalony wierzchołek z pozostałymi jest równy *n*.**
Zgodnie z tym przypuszczeniem, **wartość iloczynu dla tysiąckąta foremnego wynosi 1000.**

2015 matematyka BEZ GRANIC

rok zał. 1919 ptm

Zadanie specjalne dla 1. klas szkół ogólnokształcących i technikum

Zadanie 11 (5 punktów) – Zagnieżdżone bańki

Promień pierwotnej bańki wynosi 6 cm.
Promień zewnętrznej bańki wynosi 7 cm. Jeśli oznaczyć promień wewnętrznej bańki przez R, to pomiędzy objętościami zachodzi następująca równość: $V_7 = V_R + V_6$.

Stąd wynika, że $R^3 = 7^3 - 6^3 = 127$. A zatem R≈5,03 cm.
Średnica wewnętrznej bańki musiałaby wynosić nieco ponad 10 cm.

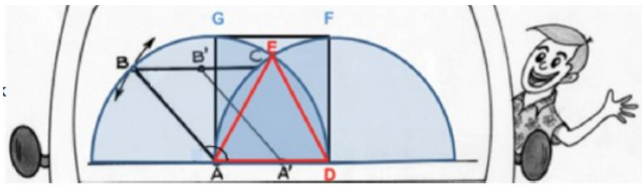
Zadanie 12 (7 punktów) – Pole do popisu

Każdy sześciokąt składa się z 6 trójkątów równobocznych o takich samych wymiarach, jak ściany trójkątne.
Prawdopodobieństwo, że mucha usiądzie na ścianie sześciokątnej wynosi

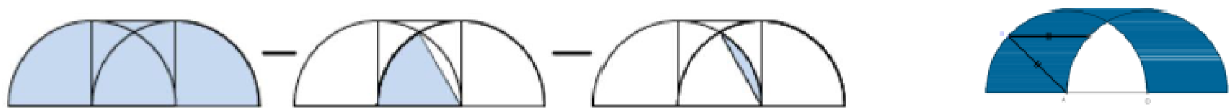
$$\frac{4\cdot 6}{4\cdot 6+4}=\frac{24}{28}=\frac{6}{7}$$

Zadanie 13 (10 punktów) – Wszystko wytrze?

Czworokąt ADFG jest kwadratem
o boku 0,7 m.
Trójkąt ADE jest równoboczny.



Poniższy rysunek ilustruje obliczenia wycieranej powierzchni:



$$0{,}5\cdot\pi\cdot 0{,}7^2+0{,}7^2-\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 0{,}7^2-\left[\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 0{,}7^2-\frac{0{,}7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}7}{2}\right]=0{,}7^2\cdot\left[\frac{\pi}{6}+1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right]\approx 0.9587$$

Pole powierzchni wycieranej wynosi nieco poniżej 1m² (0,9587 m²).
Konstruktor nie przyjmie propozycji Eryka, gdyż duża część na środku przedniej szyby nie jest wycierana.

Zadanie wyłącznie dla 1. klasy szkoły zawodowej

Zadanie 13 (10 punktów) – Manon u źródła

Parcela Manon to 1/6 całej powierzchni. To daje nam sześcioro rodzeństwa.

Manon ma zatem pięciu braci.

Przykładowe podziały terenu przedstawione są na rysunkach.