

Zadanie 1 (7 punktów) Jedno z wielu

Może być wiele pytań: większa czy mniejsza, parzysta czy nieparzysta, należąca czy nie do dzielników 6, 10 itd.itp. Stąd i liczne rozwiązania. Trudność polega na postawieniu odpowiednich pytań.

Przykładowe rozwiązanie: 1) Czy to liczba parzysta? 2) Czy jest większa od 3,5? 3) Czy jest wielokrotnością 3?

Zadanie 2 (5 punktów) Równowaga

Masa jest proporcjonalna do objętości. Na lewej szali objętość kostki wynosi 8^3 mm^3 , a na prawej – 12^3 mm^3 .

Niech k oznacza liczbę małych kostek, natomiast l – liczbę dużych kostek. Wówczas $8^3 k = 12^3 l$.

Stąd $8k = 27l$. Ponieważ $\text{NWD}(8, 27) = 1$, więc $27 | k$ oraz $8 | l$.

Zatem najmniejsze wartości k i l to 27 i 8.

Równowagę osiągniemy umieszczając 27 małych kostek na szali A i 8 dużych kostek na szali B.

Zadanie 3 (7 punktów) Suszone jabłka

5 kilogramów jabłek zawierających w 80% wodę to 4 kg wody i 1 kg suchej masy.

Ponieważ po wysuszeniu 60% stanowi woda, więc 40% stanowi sucha masa. Sucha masa wynosi nadal 1 kg, więc suszone jabłka ważą 2,5 kg.

Zadanie 4 (5 punktów) Smacznego

Łatwiej obliczyć objętość ciasta po odkrojeniu poszczególnych kawałków niż objętość każdego kawałka z osobna.

	1. dzień	2. dzień	3. dzień	4. dzień	5. dzień	6. dzień	7. dzień	8. dzień	9. dzień	10. dzień
Objętość początkowa (w cm^3)	10^3	9^3	8^3	7^3	6^3	5^3	4^3	3^3	2^3	1^3
Objętość końcowa (w cm^3)	9^3	8^3	7^3	6^3	5^3	4^3	3^3	2^3	1^3	0
Objętość spożytego ciasta (w cm^3)	271	217	169	127	91	61	37	19	7	1

Zadanie 5 (7 punktów) Curiosity !

Gdyby Fobos całkowicie zasłonił Słońce, jego średnicę D można by było wyznaczyć, korzystając z podobieństwa trójkątów. Wówczas $\frac{D}{1,4 \times 10^6} = \frac{6000}{2,4 \times 10^8}$. Stąd $D \approx 35 \text{ km}$. Jednak mierząc średnice widoczne na zdjęciu

otrzymujemy 1,2 cm dla Fobosa i 2,1 cm dla Słońca. Względna średnica Fobosa stanowi $4/7$ średnicy Słońca. Rzeczywista średnica Fobosa wynosi więc około $35 \times 4/7 = 20 \text{ km}$.

UWAGA: Pomiar średnic Fobosa i Słońca dokonany na rysunku może się różnić od podanego powyżej.

Wynik 1,3 cm i 2,2 cm uznajemy również za poprawny (wówczas średnica Fobosa wynosi około 20,68 km).

Zadanie 6 (5 punktów) Licząc na zwycięstwo

Suma wszystkich numerów zadań jest równa sumie liczb

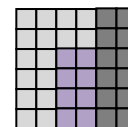
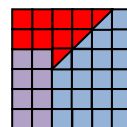
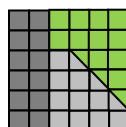
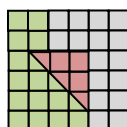
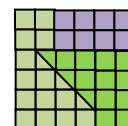
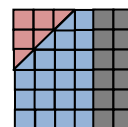
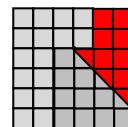
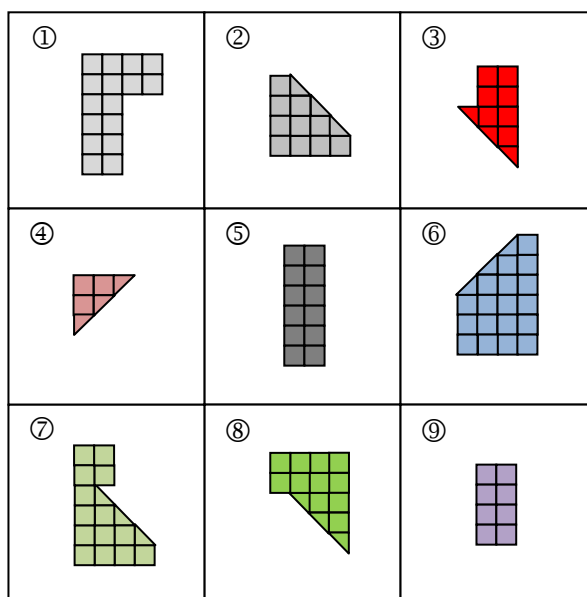
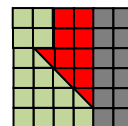
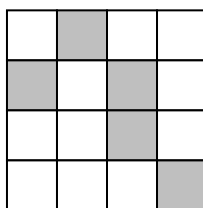
$$1+2+\dots+n \text{ i wynosi } S_n = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

Obliczając kolejne sumy otrzymujemy: $S_{61}=1891$, $S_{62}=2016$, $S_{63}=2079$.

Zauważmy, że liczba zadań nie może przekroczyć 62. Gdyby np. wynosiła 63, to nawet jeśli Barnaba nie rozwiązałby najcenniejszego zadania (za 63 punkty) suma zdobytych przez niego punktów przekroczyłaby 2014. Stąd $S_{61} < 2014 < S_{62}$.

Ponieważ $2016 - 2014 = 2$, więc Barnaba nie rozwiązał drugiego zadania.

UWAGA: Uczniowie najpewniej nie znają wzoru na sumę n kolejnych liczb będą, więc podejmowali próby obliczeń za pomocą kalkulatora; nie stanowi to jednak większej trudności.



Zadanie 10 (10 punktów) Sztuczki ekierki

Obok przedstawiono trzy stożki powstałe przez obrót ekierki :

Objętość stożka 1 wynosi:

$$V_1 = \frac{16 \times 12^2 \times \pi}{3} = 768\pi.$$

Objętość stożka 2 wynosi:

$$V_2 = \frac{12 \times 16^2 \times \pi}{3} = 1024\pi.$$

Aby obliczyć objętość podwójnego stożka, należy najpierw obliczyć długość trzeciego boku ekierki równą

$$\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

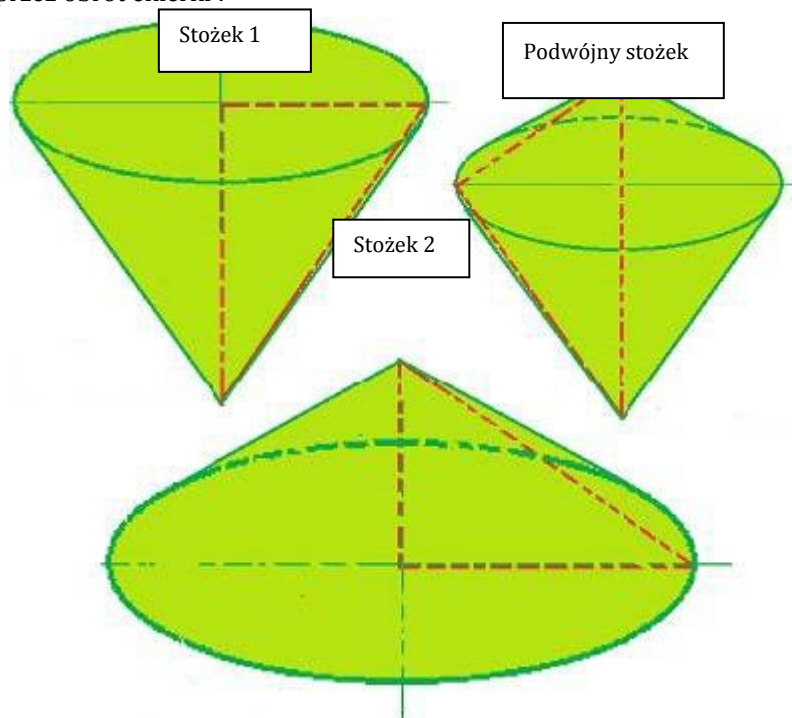
oraz długość trzeciej wysokości trójkąta

$$\text{równą } \frac{12 \times 16}{20} = 9,6.$$

Zatem objętość podwójnego stożka wynosi:

$$V_3 = \frac{20 \times 9,6^2 \times \pi}{3} = 614,4\pi.$$

Ponieważ objętości trzech brył są różne, więc Łukasz nie ma racji.


Zadania dla klasy pierwszej szkoły ponadgimnazjalnej
Zadanie 11 (5 punktów) Horda jedynek

Karolina znalazła wielokrotność liczby 7 równą 111111, którą można obliczyć np. za pomocą kalkulatora ($15873 \times 7 = 111111$).

Niech liczba naturalna N będzie zapisana za pomocą 2014 jedynek. Grupujemy cyfry liczby N po 6, rozpoczynając od lewej. Otrzymamy 335 takich grup, po których następują 4 jedynki.

Ponieważ $1111 = 158 \times 7 + 5$, więc reszta z dzielenia liczby N przez 7 wynosi 5.

Zadanie 12 (7 punktów) Niezłe zagranie

Jan wybiera kostkę A	B wygrywa z A z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$	C wygrywa z A z prawdopodobieństwem $\frac{5}{9}$	D wygrywa z A z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$	Lena wybiera kostkę C lub D
Jan wybiera kostkę B	A wygrywa z B z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$	C wygrywa z B z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$	D wygrywa z B z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$	Lena wybiera kostkę A
Jan wybiera kostkę C	A wygrywa z C z prawdopodobieństwem $\frac{4}{9}$	B wygrywa z C z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$	D wygrywa z C z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$	Lena wybiera kostkę B
Jan wybiera kostkę D	A wygrywa z D z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$	B wygrywa z D z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$	C wygrywa z D z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$	Lena wybiera kostkę C

Zadanie 13 (10 punktów) Co za wypas! (wyłącznie dla 1. klas ogólnych i technicznych)

Powierznię, na której może się wypasać koza, można podzielić na trzy prostokąty, trzy części stanowiące $1/3$ koła każda oraz „pusty” trójkąt, tzn. w środku trójkąta z szyn pozostanie mała trójkątna łąka, do której koza nie ma dostępu. (rysunek obok)

Można połączyć trzy części koła w jedno o polu równym $4\pi \text{ m}^2$.

Pole powierzchni trzech prostokątów na zewnątrz szyny wynosi $3 \times 10 \times 2 = 60 \text{ m}^2$.

Czworokąt $ABCD$ składa się z dwóch przystających trójkątów prostokątnych o kątach 30° i 60° .

Ponieważ $|BC| = 2 \text{ m}$, więc $|AC| = 4 \text{ m}$ i

$|AD| = 2\sqrt{3} \text{ m}$.

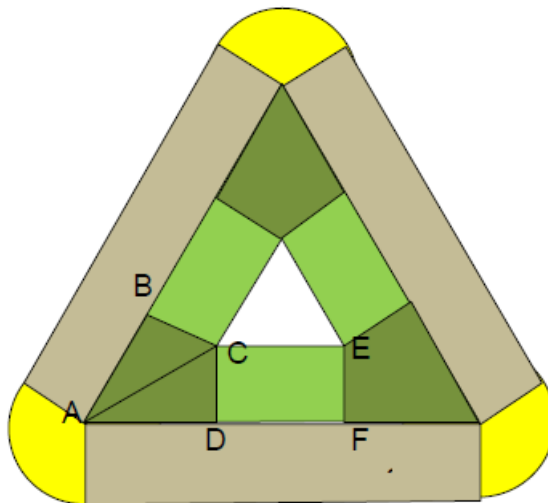
Pole powierzchni tego czworokąta wynosi zatem $4\sqrt{3} \text{ m}^2$.

Natomiast pole prostokąta $DCEF$ wynosi $|BC| \times |DF| = 2(10 - 4\sqrt{3}) = 20 - 8\sqrt{3} \text{ m}^2$.

Pole powiechchni, na której może wypasać się koza wewnątrz szyny wynosi zatem:

$$3 \times 4\sqrt{3} + 3(20 - 8\sqrt{3}) = 60 - 12\sqrt{3} \text{ m}^2.$$

Pole całkowite, na którym może wypasać się koza to: $4\pi + 60 + 60 - 12\sqrt{3} = 120 + 4\pi - 12\sqrt{3} \approx 111,78 \text{ m}^2$.

**Zadanie 13 (10 punktów) Coraz wyżej (wyłącznie dla 1. klas zawodowych)**

W 2013 roku wybudowano 63-piętrową wieżę. Pierwsza wieża została wzniesiona w 1953 roku (i miała 3 piętra).

Wskazówka :

„Pierwszy budynek ma niewielką liczbę pięter” jest ważna. Gdybyśmy nie brali jej pod uwagę, znaleźlibyśmy również inne rozwiązania zadania: w 1992 roku wzniesiono 81-piętrową wieżę, a w 2013 – 102-piętrową.