

TWIERDZENIE BROUWERA

Michał Szachniewicz

Twierdzenie 1 (Brouwera) Każde ciągle odwzorowanie $f : B^n \rightarrow B^n$ kuli w kulę, ma punkt stały.

1. Czy możliwe jest wypełnienie tabelki poniżej liczbami rzeczywistymi, w taki sposób, że w każdym polu znajduje się średnia arytmetyczna liczb z czterech sąsiednich pól? Czy zawsze taką tabelkę można wypełnić na tylko jeden sposób?
2. Wyobraź sobie szafę w postaci trójkąta równobocznego. Dzielimy każdy bok na n równych części i przez punkty podziału prowadzimy proste równoległe do boków. Dostajemy podział szafy na n^2 szuflad. W każdej szufladzie jest jeden dokument. Przekładamy dokumenty w następujący sposób:
 - (a) Tak, by dwa przedmioty były koło siebie po przełożeniu wtedy i tylko wtedy, gdy były koło siebie na początku.
 - (b) Jeśli dwa przedmioty na początku były koło siebie, to po przełożeniu trafią do sąsiednich szuflad, lub do jednej szuflady.

Rozważ podane przypadki i zastanów się, czy dla tych warunków zawsze istnieje przedmiot, który nie zostanie przełożony. A czy zawsze będzie taki, który albo nie został przeniesiony, albo przeszedł do sąsiedniej szuflady?

Uwaga - Szuflady możemy uważać za sąsiednie na dwa sposoby:

- (a) kiedy mają sąsiednią ścianę,
 - (b) kiedy mają wspólny punkt.
3. Udowodnij twierdzenie Brouwera dla $n = 1$.
 4. Wykaż, że jeśli dla dowolnej *triangulacji* trójkąta, jeśli każdy wierzchołek "małych" trójkątów kolorujemy na jeden z trzech kolorów, tak, że wierzchołki "dużego" trójkąta są w trzech różnych kolorach, a punkty na krawędziach pomiędzy dwoma wierzchołkami "dużego" trójkąta są koloru jednego z tych wierzchołków, to istnieje conajmniej jeden trójkolorowy "mały" trójkąt. By to zrobić możesz skorzystać z następujących wskazówek:
 - (a) Rozważ graf *dualny* trójkąta, z drobną modyfikacją - rysuj krawędź pomiędzy dwoma ścianami, tylko wtedy, gdy ściany stykają się wierzchołkami o kolorach 1 i 2.
 - (b) Pokaż, że suma stopni wierzchołków jest parzysta.
 - (c) Zauważ, że stopnie wierzchołków grafu dualnego znajdujących się w trójkątach 3-kolorowych są stopnia jeden. Pokaż też, że stopień ściany zewnętrznej jest nieparzysty.
 5. Niech f będzie ciągłym przekształceniem $\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \wedge x_i \geq 0\}$ w siebie (bez punktów stałych). Czy jeśli pokolorujemy niektóre punkty $\mathbf{y} \in \Delta$ na $\lambda(\mathbf{y}) = \min\{i : f(\mathbf{y})_i < y_i\}$, to kolorowanie punktów na brzegu trójkąta Δ będzie spełniało własność z zadania drugiego?
 6. Czy w zbiorze Δ z poprzedniego zadania każdy ciąg ma podciąg zbieżny?
 7. Rozważ ciąg triangulacji $\mathcal{T}_n$ zbioru Δ , takich, że każda kolejna jest zagęszczeniem poprzedniej oraz $\delta(\mathcal{T}_n) \xrightarrow{n} 0$. Pokoloruj każdy wierzchołek $\mathcal{T}_n$ na kolor λ z zadania trzeciego. Korzystając z poprzednich zadań i tych rozważań, znajdź dowód twierdzenia Brouwera.

	1	-1	3	4	-3	2	3	
0								2
2								-1
-4								3
3								4
2								5
	2	-1	3	-7	2	3	-5	

	1	0	1	
0				0
0				0
0				0
	1	0	1	

	0	1	0	1	
1					0
0					1
1					0
0					1
	1	0	1	0	