Wałbrzych 19.01.2007
Sesja z geometrii elementarnej - prowadzący Stefan Mizia
ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA PTOLEMEUSZA

Twierdzenie Ptolemeusza. *Iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta.*

1. Niech X dowolny punkt na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC. Wykaż, że największy z odcinków XA, XB, XC jest równy sumie dwóch pozostałych.
2. Dowolny okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta odcina na jego ramionach odcinki o długościach m i n, a na dwusiecznej o długości l. Wykaż, że stosunek $\frac{m+n}{l}$ nie zależy od położenia okręgu, ani jego promienia.
3. Na przeciwprostokątnej zbudowano kwadrat na zewnątrz. Wyznacz odległość wierzchołka kąta prostego od środka symetrii kwadratu wiedząc, że suma przyprostokątnych m.
4. Trójkąt ABC wpisano w okrąg. Oznaczmy przez m, n, k odległości pewnego punktu X leżącego na okręgu od boków BC, AC, AB. Wykaż, że $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} + \frac{c}{k}$, gdzie a, b, c - długości boków BC, AC, AB.
5. Niech $ABCDEFG$ siedmiokąt foremny. Wykaż, że $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.
6. Długości boków trójkąta ABC tworzą ciąg arytmetyczny ($b > a > c$). Jeśli na trójkącie opisać okrąg i przedłużyć dwusieczną AI do przecięcia z okręgiem w punkcie W, to $AI = IW$, gdzie I środek okręgu wpisanego (incentrum).
7. Wykaż, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości środka okrągu opisanego od boków trójkąta równa jest sumie promieni okręgów opisanego i wpisanego.
8. W trójkąt ABC wpisano półkole tak, że średnica półkola zawiera się w boku BC. F_1, F_2 punkty styczności z ramionami trójkąta. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na trójkącie w punkcie W. Dowieść, że pole trójkąta $S = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot AW$.
9. W trójkącie ABC punkty A, M_2, M_3, L_1, leżą na jednym okręgu. Wykaż, że $a\sqrt{2} = b + c$, gdzie M_2 i M_3 środki boków AC i AB odpowiednio, L_1 - punkt przecięcia się dwusiecznej $\angle BAC$ z BC.
10. Proste wyznaczone przez dwusieczne kątów A, BiC trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na tym trójkącie odpowiednio w punktach L_1, L_2 i L_3. Udowodnij, że $Al_1 + BL_2 + CL_3 > AB + BC + AC$.

Jest taki zwyczaj w Rosji -
wieczorami zajmować się geometrią
- ludowe (ros.)