III OTWARTE MISTRZOSTWA XIV LO W ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ Z GEOMETRII ELEMENTARNEJ 2005

1. W trójkącie ABC środkowe boków AC i BC są wzajemnie prostopadłe. AC = b, CB = a. Oblicz AB.

2. Przez wierzchołki A i B przy podstawie trójkąta równoramiennego ABC poprowadzono proste przechodzące przez środek O wysokości CD. Przecinają one ramiona trójkąta w punktach K i L. Oblicz pole czworokąta CKOL wiedząc, że pole trójkąta ABC wynosi S.

3. W trapezie podstawy mają długości a i b ($a > b$). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi $\frac{\pi}{2}$. Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw.

4. W trójkącie ABC, w którym $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, punkt M jest środkiem boku AB, AC = 3, BC = 4. W trójkąty AMC i BMC wpisano okręgi o promieniach r_1, r_2. Oblicz r_1-r_2.

5. Trapez, na którym można opisać okrąg i w który można wpisać okrąg ma podstawy a, b. Oblicz pole trapezu.

6. Dane są promienie R i r okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt prostokątny. Oblicz obwód trójkąta.

7. Przekątne dzielą trapez o polu S na cztery trójkąty. Stosunek długości podstaw wynosi k. Oblicz pole każdego z trójkątów.

8. Dane są dwa okręgi przecinające się w punktach A i B. Okrąg O_1 przechodzi przez środek okręgu O_2. Styczna do okręgu O_1, poprowadzona przez punkt B, przecina okrąg O_2. W punkcie C. Wykaż, że AB = BC.

9. W trójkąt ABC wpisano okrąg styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach M, N, K. Prosta l przechodząca przez środek D boku AC równolegle do MN przecina proste BC i BA odpowiednio w punktach T i S. Dowieść, że TC = KD = AS.

10. Przez dowolny punkt K leżący wewnątrz trapezu ABCD poprowadzono prostą przecinającą podstawy AB i DC odpowiednio w punktach P i Q. Okręgi opisane na trójkątach APK i CQK przecinają się oprócz punktu K jeszcze w punkcie L. Wykaż, że punkt L należy do przekątnej AC.

WROCŁAW 9.06.2005