V OTWARTE MISTRZOSTWA XIV LO W ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ Z GEOMETRII ELEMENTARNEJ
ZADANIA FINAŁOWE 27.04.2007

1. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie K. Odległości K od punktów styczności okręgów ze wspólną styczną wynoszą 6 i 8. Znajdź promienie okręgów.
2. Wysokość i środkowa poprowadzone z jednego wierzchołka trójkąta tworzą z bokami jednakowe kąty. Środkowa ma długość m. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie.
3. W trójkącie ABC dwusieczne AD i CE przecinają się w F. Punkty B, D, E i F leżą na okręgu. Wykaż, że $\angle ABC = 60^o$.
4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. O jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Niech K i L - punkty na przyprostokątnych AC i BC takie, że $\angle KOL = 90^o$. Wykaż, że $AK^2 + BL^2 = KL^2$.
5. Boki trójkąta ABC są podzielone punktami M, N i P tak, że $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \frac{1}{4}$. Znajdź stosunek pola trójkąta ograniczonego prostymi AN, BP i CM do pola trójkąta ABC.
6. Dwusieczna kąta A w trójkącie ABC przecina okrąg opisany na trójkącie w punkcie D. Znajdź długość cięciwy DC wiedząc, że $DI = n$, gdzie I - środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC.
7. Dany jest czworokąt $ABCD$. Na prostych AC i BD wzięto punkty K i M tak, że $BK||AD$ i $BC||AM$. Wykaż, że $KM||CD$.
8. Prosta przechodząca przez środki przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$ przecina boki AD i BC w punktach M i N. Wykaż, że $P_{\Delta ADN} = P_{\Delta BMC}$.
9. W trójkącie ABC o polu S poprowadzono dwusieczną CE i środkową BD, które przecinają się w F. Oblicz pole czworokąta $AEFD$, mając dane $BC = a$ oraz $AC = b$.
10. Wykaż, że punkt symetryczny do wierzchołka C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC, środek boku AB i ortocentrum są współliniowe.
11. W trójkącie ABC $AB = AC$, $\angle BAC = 80^o$. Wewnątrz trójkąta obrano punkt M taki, że $\angle MBC = 30^o$ i $\angle MCB = 10^o$. Oblicz kąt AMC.
12. Z punktu A leżącego na zewnątrz okręgu o środku O i promieniu r poprowadzono sieczną ACB (C leży między A i B). Okrąg zbudowany na odcinku BC jako na średnicy jest styczny do odcinka AO w punkcie D. Wyznacz AD wiedząc, że $AO = a$.